

## Calcul différentiel

◇ Le but du chapitre est de définir les dérivées partielles ainsi que la notions de classe  $C^1$  pour les fonctions de plusieurs variables. Les applications usuelles de ceci :

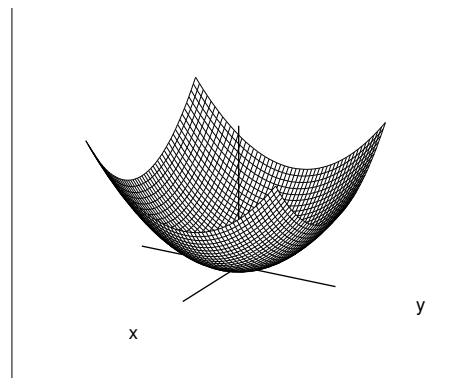
- La recherche d'extrémums : si  $f$  est de classe  $C^1$  sur un intervalle ouvert  $U$  et si  $f$  admet un extrémum en  $a \in U$  alors les dérivées partielles de  $f$  s'annulent en  $a$ .
- La résolution d'équations aux dérivées partielles, par exemple l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

**Remarque.** Les résultats de ce chapitre s'appliquent à des fonctions de  $n$  variables. Pour simplifier, les énoncés sont données pour des fonctions de 2 variables, notées en général  $x$  et  $y$  et on fera des remarques sur les fonctions de 3 variables.  $\square$

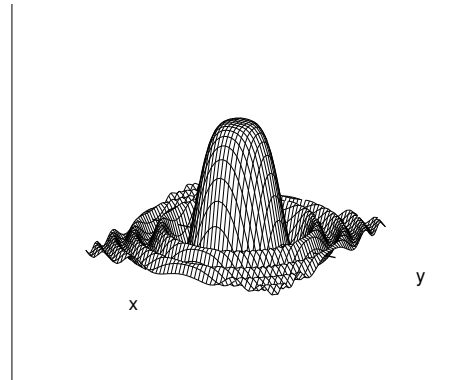
◇ Quelques représentations graphiques de fonctions de 2 variables. Si  $f$  est une fonction de 2 variables, on peut représenter graphiquement  $f$  dans l'espace en plaçant les points de coordonnées  $(x, y, z)$  avec  $z = f(x, y)$ . Cela donne une surface dans l'espace (de manière analogue, la représentation graphique d'une fonction  $f$  d'une seule variable est la courbe du plan constituée des points de coordonnées  $(x, y)$  avec  $y = f(x)$ ). On donne ci-dessous quelques exemples de surface représentant des fonctions de 2 variables.

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$



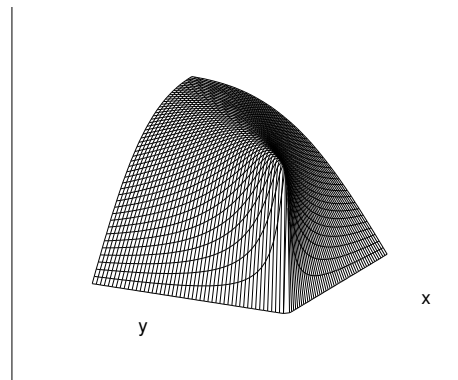
$$f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0)$$

$$= 1 \quad \text{sinon}$$



$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0)$$

$$= 0 \quad \text{sinon}$$



**Notation :** Dans la suite  $U$  sera un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  (ou  $\mathbb{R}^3$  pour les fonctions de 3 variables).  $\square$

**Remarque.** Nous aurons besoin dans ce chapitre de notions étudiées dans le cours de topologie, essentiellement ouvert, fermé et continuité pour une fonction de plusieurs variables. On utilisera aussi la norme usuelle  $\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$  (dans le cas de 3 variables  $\|(x, y, z)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ).  $\square$

## I. Dérivées partielles et fonctions de classe $C^1$

**Définition 1 – Dérivées partielles**

Soient  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  et  $(x_0, y_0) \in U$ . On dit que  $f$  admet une dérivée partielle par rapport à  $x$  en  $(x_0, y_0)$  lorsque le taux d'accroissement (suivant la première variable) :

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

admet une limite finie lorsque  $h \rightarrow 0$ . Lorsque c'est le cas, on note :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

De même, on dit que  $f$  admet une dérivée partielle par rapport à  $y$  en  $(x_0, y_0)$  lorsque le taux d'accroissement (suivant la deuxième variable) :

$$\frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

admet une limite finie lorsque  $h \rightarrow 0$  et lorsque c'est le cas on note :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

**Définition 2 – Fonction de classe  $C^1$**

On dit que  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $C^1$  sur  $U$  lorsque :

- La fonction  $f$  admet des dérivées partielles par rapport à  $x$  et  $y$  en tout point  $(x_0, y_0) \in U$  ;
- Les fonctions  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sont continues sur  $U$ .

On note  $C^1(U, \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions définies et de classe  $C^1$  sur  $U$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

**Remarque.** La notion de continuité pour une fonction de plusieurs variable a été vue dans le cours de topologie (illustrations du cours de topologie exercice 2 et TD 20 exercice 6).  $\square$

**Remarque.** S'il y a une troisième variable  $z_0$ , on est amené à définir la dérivée partielle par rapport à  $z$  :

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0 + h) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

sous réserve d'existence et  $f$  est de classe  $C^1$  si, et seulement si, ses trois dérivées partielles sont définies et continues sur  $U$ .  $\square$

**Remarque.** Comme d'habitude, on dispose de résultats concernant les opérations : dérivée par rapport à  $x$  ou  $y$  d'une somme, d'un produit, d'un quotient dont le dénominateur ne s'annule pas. Il s'agit des formules usuelles et pour simplifier on ne les détaille pas ici. La dérivée d'une composée est plus délicate et fait l'objet d'un paragraphe ultérieur. Comme

d'habitude une somme de fonctions de classe  $C^1$ , un produit de fonctions de classe  $C^1$  sont de classe  $C^1$ . De même pour un quotient de fonctions de classe  $C^1$  dont le dénominateur ne s'annule pas.  $\square$

**Exemples.** Trois situations classiques.

- (1) La fonction  $f$  est définie avec une formule sans problème particulier. Par exemple :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \cos(xy + y^2) \end{aligned}$$

Cette fonction  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  comme composée de fonctions de classe  $C^1$  et pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  les dérivées partielles de  $f$  en  $(x, y)$  s'obtiennent simplement en dérivant l'expression de  $f(x, y)$  soit par rapport à  $x$ , soit par rapport à  $y$  (en supposant alors l'autre variable constante) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= -y \sin(xy + y^2) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -(x + 2y) \sin(xy + y^2) \end{aligned}$$

- (2) La fonction  $f$  est définie avec un cas particulier, en général en  $(0, 0)$ . Par exemple :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \neq (0, 0) &\mapsto \frac{x}{x^2 + y^2} \\ (0, 0) &\mapsto 0 \end{aligned}$$

Ici la fonction  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  *privé de*  $(0, 0)$  et pour  $(x, y) \neq (0, 0)$  les dérivées partielles s'obtiennent en dérivant l'expression de  $f(x, y)$  par rapport à  $x$  ou  $y$  en supposant l'autre variable constante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

Pour l'étude en  $(0, 0)$  on revient à la définition de dérivée partielle en formant des taux d'accroissement en  $(0, 0)$ . Suivant la première variable pour commencer :

$$\frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{h/h^2 - 0}{h} = \frac{1}{h^2} \xrightarrow{h \rightarrow 0} +\infty$$

Ce taux d'accroissement n'admet pas de limite finie lorsque  $h \rightarrow 0$ , donc  $f$  n'admet pas de dérivée partielle par rapport à  $x$  en  $(0, 0)$ . Suivant la deuxième variable maintenant :

$$\frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \frac{0}{h} = 0 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

Ce taux d'accroissement admet une limite finie lorsque  $h \rightarrow 0$ , donc  $f$  admet une dérivée partielle par rapport à  $y$  en  $(0, 0)$  et :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

# I. Dérivées partielles et fonctions de classe $C^1$

- (3) La fonction  $f$  est définie sans valeur particulière mais il y a malgré tout un problème en un point. Par exemple :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

La fonction  $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$  est de classe  $C^1$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  mais la fonction  $\sqrt{\cdot}$  n'est de classe  $C^1$  que sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . Ainsi,  $f$  est de classe  $C^1$  comme composée de fonctions de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  privé de  $(0, 0)$ . Pour  $(x, y) \neq (0, 0)$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

En  $(0, 0)$  on revient à la définition de dérivée partielle en utilisant les taux d'accroissement. Tout d'abord par rapport à la première variable :

$$\frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{\sqrt{h^2} - 0}{h} = \frac{|h|}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 1 \quad \text{et} \quad \xrightarrow{h \rightarrow 0^-} -1$$

Ces deux limites différentes montrent que le taux d'accroissement n'admet pas de limite finie en  $(0, 0)$  donc  $f$  n'admet pas de dérivée partielle par rapport à  $x$  en  $(0, 0)$ . On montre de même que  $f$  n'admet pas de dérivée partielle par rapport à  $y$  en  $(0, 0)$ .  $\square$

**Exercice 1** Premier exemple pour l'étude du caractère  $C^1$ . On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  en posant :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) &= 0 \end{aligned}$$

- (a) Justifier que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .
- (b) Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  avec  $(x, y) \neq (0, 0)$ , calculer  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ .
- (c) Justifier que  $f$  possède des dérivées partielles par rapport à  $x$  et  $y$  en  $(0, 0)$  et préciser leur valeur.

On dispose donc de deux nouvelles fonctions  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  définies sur  $\mathbb{R}^2$ .

- (d) Justifier que  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sont continues en  $(0, 0)$ .
- (e) L'application  $f$  est-elle de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  tout entier?

Réponse :

- (a) La fonction  $f$  est définie avec un problème en  $(0,0)$ . La fonction  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  comme quotient de fonctions de classe  $C^1$  dont le dénominateur ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ .
- (b) Sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  les dérivées partielles se calculent directement (en dérivant par rapport à  $x$  à  $y$  fixé et inversement). Pour  $(x, y) \neq (0,0)$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2x^4y}{(x^2 + y^2)^2}$$

- (c) Pour savoir si les dérivées partielles existent en  $(0,0)$  on utilise des taux d'accroissement. Ici ils sont très simples (ils sont tous nuls) et en pratique c'est souvent le cas :

$$\frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$\frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

On en déduit que  $f$  admet des dérivées partielles par rapport à  $x$  et  $y$  en  $(0,0)$  et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

- (d) On dispose alors de deux nouvelles fonctions définies sur  $\mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \neq (0, 0) &\mapsto \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \\ (0, 0) &\mapsto 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \neq (0, 0) &\mapsto \frac{2x^4y}{(x^2 + y^2)^2} \\ (0, 0) &\mapsto 0 \end{aligned}$$

et il faut étudier la continuité en  $(0,0)$  de ces deux fonctions. On utilise un passage en coordonnées polaires : on considère  $(x, y) \neq (0,0)$  et on note

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \text{avec} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|_2 > 0, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

On a alors :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right| = \left| \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \right| = \frac{2|r^5 \cos \theta \sin^4 \theta|}{r^4} \leq 2r = 2 \|(x, y)\|_2 \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$$

# I. Dérivées partielles et fonctions de classe $C^1$

Par encadrement, on en déduit :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$$

Donc  $\frac{\partial f}{\partial x}$  est continue en  $(0, 0)$ . De même :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right| = \left| \frac{2x^4 y}{(x^2 + y^2)^2} \right| = \frac{2|r^5 \cos^4 \theta \sin \theta|}{r^4} \leq 2r = 2 \|(x, y)\|_2 \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$$

Par encadrement, on en déduit :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$$

Donc  $\frac{\partial f}{\partial y}$  est continue en  $(0, 0)$ .

- (e) Les fonctions  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sont continues sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  (question a) et continues en  $(0, 0)$  (question d) donc continues sur  $\mathbb{R}^2$ . La fonction  $f$  est donc de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 2** Deuxième exemple pour l'étude du caractère  $C^1$ . Déterminer si la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  en posant

$$g(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0)$$

$$g(0, 0) = 0$$

est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

*Réponse :*

La fonction  $g$  est définie avec un problème en  $(0, 0)$ . La fonction  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  comme quotient de fonctions de classe  $C^1$  dont le dénominateur ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . De plus, pour  $(x, y) \neq (0, 0)$  on obtient par le calcul :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{x^4 - x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Pour savoir si les dérivées partielles de  $g$  existent en  $(0, 0)$  on utilise des taux d'accroissement :

$$\frac{g(h, 0) - g(0, 0)}{h} = 0 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$\frac{g(0, h) - g(0, 0)}{h} = 0 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

On en déduit que  $g$  admet des dérivées partielles par rapport à  $x$  et  $y$  en  $(0,0)$  et :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0$$

On dispose alors de deux nouvelles fonctions :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \neq (0,0) &\mapsto \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} \\ (0,0) &\mapsto 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \neq (0,0) &\mapsto \frac{x^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ (0,0) &\mapsto 0 \end{aligned}$$

et il faut étudier la continuité de ces deux fonctions. On peut commencer par essayer les coordonnées polaires :

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) \right| = \left| \frac{2r^4 \cos \theta \sin^3 \theta}{r^4} \right| = 2 |\cos \theta \sin^3 \theta|$$

On voit qu'il n'est pas possible de majorer indépendamment de  $\theta$  en conservant  $r$ . On regarde alors par exemple :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x,0) &= 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x}(0,y) &= 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,x) &= \frac{2x^4}{(2x^2)^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,x) \not\underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} \frac{\partial g}{\partial x}(0,0)$$

Donc  $\partial g / \partial x$  n'est pas continue en  $(0,0)$ , donc  $g$  n'est pas de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .



## I. Dérivées partielles et fonctions de classe $C^1$

### Définition 3 – Différentielle et gradient

Soient  $f \in C^1(U, \mathbb{R})$  et  $(x_0, y_0) \in U$ . On appelle gradient de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  et on note  $\nabla f(x_0, y_0)$  le vecteur :

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

On appelle différentielle de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  (on l'utilisera peu) et on note  $df(x_0, y_0)$  l'application linéaire :

$$\begin{aligned} df(x_0, y_0) : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

de sorte que :

$$df(x_0, y_0)(x, y) = \langle \nabla f(x_0, y_0), (x, y) \rangle$$

(produit scalaire canonique dans  $\mathbb{R}^2$ ).

**Remarque.** Si  $f$  est une fonction de 3 variables, il faut ajouter une composante pour la variable  $z$ . □

**Remarque.** Avec les opérations sur les dérivées partielles, on obtient facilement :

$$\begin{aligned} \nabla(f + g)(a) &= \nabla f(a) + \nabla g(a) \\ \nabla(fg)(a) &= g(a)\nabla f(a) + f(a)\nabla g(a) \end{aligned}$$

(formules utilisées en physique?) et pour les différentielles (peu utile pour nous) :

$$\begin{aligned} d(f + g)(a) &= df(a) + dg(a) \\ d(fg)(a) &= f(a)dg(a) + g(a)df(a) \end{aligned}$$

□

**Exemple.** Pour la fonction  $f$  de l'exercice 1, qui est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ , et pour  $(x, y) \neq (0, 0)$  :

$$\nabla f(x, y) = \left( \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{2x^4y}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} (y^3, x^2)$$

Par ailleurs :

$$\nabla f(0, 0) = (0, 0)$$

□

**Exercice 3 Points critiques.** On appelle point critique d'une fonction  $f$  de classe  $C^1$  tout point  $(x, y)$  tel quel  $\nabla f(x, y) = 0$ .

- (a) Déterminer les points critiques de  $f : (x, y) \mapsto x^3 - 3x(1 + y^2)$ .
- (b) Déterminer les points critiques de  $g : (x, y) \mapsto xy - x^2$ .

Réponse :

Les fonctions  $f$  et  $g$  sont de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  comme sommes de produits de fonctions de classe  $C^1$ .

(a) Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 3x^2 - 3(1 + y^2) = 3(x^2 - 1 - y^2) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -6xy\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 - y^2 = 0 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left( \begin{cases} x^2 - 1 - y^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^2 - 1 - y^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \right) \\ &\Leftrightarrow \left( \begin{cases} y^2 = -1 \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \right)\end{aligned}$$

Comme  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $y^2 = -1$  est impossible. On a donc :

$$\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \text{ et } y = 0 \Leftrightarrow (x, y) \in \{(1, 0), (-1, 0)\}$$

La fonction  $f$  possède donc deux points critiques qui sont  $(1, 0)$  et  $(-1, 0)$ .

(b) Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= y - 2x \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= x\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\nabla g(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$$

La fonction  $g$  possède donc un seul point critique qui est  $(0, 0)$ .

#### Théorème 4 – $DL_1$ pour une fonction de classe $C^1$

Si  $f \in C^1(U, \mathbb{R})$  et  $(x_0, y_0) \in U$ , alors :

$$f(x_0 + x, y_0 + y) = f(x_0, y_0) + x \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \underset{(x, y) \rightarrow (0, 0)}{o}(\|(x, y)\|_2)$$

On peut noter ceci de différentes facons :

$$f(x_0 + x, y_0 + y) = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (x, y) \rangle + \underset{(x, y) \rightarrow (0, 0)}{o}(\|(x, y)\|_2)$$

ou encore si on considère  $(x_1, y_1) \in U$  :

$$f(x_1, y_1) = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (x_1 - x_0, y_1 - y_0) \rangle + \underset{(x_1, y_1) \rightarrow (x_0, y_0)}{o}(\|(x_1 - x_0, y_1 - y_0)\|_2)$$

## I. Dérivées partielles et fonctions de classe $C^1$

Corollaire 5 – Une fonction de classe  $C^1$  est continue

*Si  $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ , alors  $f$  est continue sur  $U$ .*

---

**⚠ Remarque.** Dans la cas général, pour les fonctions de plusieurs variables, l'existence des dérivées partielles de  $f$  sur  $U$  n'entraîne pas la continuité de  $f$  sur  $U$ .  $\square$

◇ Ci-dessous une première application, assez intuitive mais qui finalement sert peu dans les exercices.

Théorème 6 – Caractérisation des fonctions constantes

*Si  $f \in C^1(U, \mathbb{R})$  et  $U$  est un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^2$  (ou  $\mathbb{R}^3$ ), alors on a équivalence entre :*

*(i) La fonction  $f$  est constante sur  $U$  ;*

*(ii) Toutes les dérivées partielles de  $f$  sont nulles sur  $U$ .*

*(On peut donner d'autres formulations avec la différentielle, le gradient.)*

---

## II. Application : recherche d'extrémums

### Définition 7 – Extremum global, extremum local

Soient  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $D \subset \mathbb{R}^2$ . On dit que  $f$  admet en  $(x_0, y_0) \in D$  :

- Un maximum global lorsque :  $\forall (x, y) \in D, f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$  ;
- Un maximum local lorsqu'il existe  $r > 0$  tel que :  $\forall (x, y) \in \mathcal{B}((x_0, y_0), r), f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ .

Rappel :  $\mathcal{B}((x_0, y_0), r)$  est la boule ouverte de centre  $(x_0, y_0)$  et de rayon  $r$ . Dire que  $(x, y) \in \mathcal{B}((x_0, y_0), r)$  signifie que la distance entre  $(x, y)$  et  $(x_0, y_0)$  est strictement inférieure à  $r$  (on considère que la norme utilisée est la norme euclidienne canonique).

On définit de même les notions de minimum global et minimum local.

On dit que  $f$  admet en  $a$  un extremum global (respectivement un extremum local) lorsque  $f$  admet en  $a$  un minimum global ou un maximum global (respectivement un minimum local ou un maximum local).

**Remarque.** Et ces notions s'étendent sans difficultés au cas des fonctions de 3 variables.  $\square$

♦ Pour les fonctions d'une seule variable, les dérivées sont utilisées dans la recherche des maximums et minimums des fonctions. Il ne faut cependant pas croire que si une fonction admet un maximum en un point alors sa dérivée est nécessairement nulle en ce point. Même lorsqu'il n'y a qu'une seule variable, ce résultat est faux. Par exemple la fonction  $f : x \in [0, 1] \mapsto x$  admet clairement un maximum en 1 et pourtant sa dérivée n'est pas nulle en 1. Pour que le résultat soit valable, il faut considérer une fonction définie sur un ensemble ouvert.

### Proposition 8 – Condition nécessaire d'extremum local

Si  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ ,  $f \in C^1(U, \mathbb{R})$  et  $f$  admet en  $a \in U$  un extremum local, alors  $\nabla f(a) = 0$  (réciproque fausse).

**Remarque.** On appelle point critique de  $f \in C^1(U, \mathbb{R})$  toute solution de l'équation  $\nabla f(a) = 0$ .  $\square$

**Exercice 4** Un maximum sur un fermé borné. On considère la fonction  $f$  et l'ensemble  $T$  définis par :

$$f : (x, y) \mapsto x^2 - xy + y^2 + x + y$$
$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3\}$$

On pose également  $V = \overset{\circ}{T}$  (l'intérieur de  $T$ ) et  $F = \text{fr}(D)$  (la frontière de  $T$ ). On considère de plus les points du plan  $O = (0, 0)$ ,  $A = (-3, 0)$  et  $B = (0, -3)$ .

- Représenter graphiquement l'ensemble  $T$  ainsi que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  et justifier que  $T$  est une partie fermée et bornée de  $\mathbb{R}^2$ .
- Démontrer que  $f$  admet un maximum sur  $T$ .
- Déterminer les points critiques de  $f$  ainsi que les valeurs dans  $f$  en ces points.

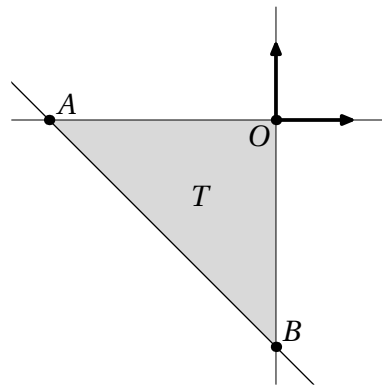
## II. Application : recherche d'extrémums

- (d) Déterminer les valeurs prises par  $f$  sur le segment  $[OA]$  et préciser le maximum de ces valeurs. Faire de même avec le segment  $[OB]$  puis le segment  $[AB]$ .
- (e) On note  $(x_0, y_0) \in T$  un point où  $f$  atteint son maximum. On constate que  $T = V \cup F$  donc  $(x_0, y_0)$  appartient soit à  $V$  soit à  $F$ . En utilisant ce qui précède, déterminer le maximum de  $f$  sur  $T$ .

Remarque : si le même principe, on peut déterminer le minimum de  $f$  sur  $T$ .

Réponse :

- (a) Un élément  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  appartient à  $T$  lorsque  $x \leq 0$  (le point est à gauche de l'axe des ordonnées),  $y \leq 0$  (le point est en dessous de l'axe des abscisses) et  $y \geq -3 - x$  (le point est au dessus de la droite d'équation  $y = -3 - x$ ). On représente graphiquement ces trois droites et l'ensemble  $T$ .



L'ensemble  $T$  est borné, par exemple  $T \subset \overline{B}(0, 3)$  (boule formée pour la norme euclidienne canonique). Considérons  $(x_n, y_n)$  suite d'éléments de  $T$  qui converge vers  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . On a alors  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ ,  $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \leq 0, y_n \leq 0, x_n + y_n \leq -3$$

Par passage à la limite d'inégalités larges, on obtient  $a \leq 0$ ,  $b \leq 0$  et  $a + b \leq -3$  donc  $(a, b) \in T$ . Par caractérisation séquentielle,  $T$  est fermé.

- (b) La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$  comme somme de produits de fonctions continues. Comme  $T$  est fermé et borné,  $f$  est bornée sur  $T$  et atteint ses bornes, en particulier  $f$  admet un maximum sur  $T$ .
- (c) La fonction  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  comme somme de produits de fonctions de classe  $C^1$  et pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x - y + 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -x + 2y + 1 \end{aligned}$$

On recherche les points critiques de  $f$  :

$$\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -1$$

La fonction  $f$  admet donc un unique point critique sur  $\mathbb{R}^2$  et :

$$f(-1, -1) = -1$$

- (d) Considérons un point  $(x, y)$  sur le segment  $[OA]$ , on a alors  $y = 0$  et  $x \in [-3, 0]$  donc :

$$f(x, y) = f(x, 0) = x^2 + x = x(x + 1)$$

Posons  $u(x) = x^2 + x$ , il est facile d'étudier les variations de cette fonction, soit à l'aide de sa dérivée soit en constatant que  $u$  est un polynôme du second degré dont les racines sont 0 et  $-1$ . La fonction  $u$  est décroissante jusqu'à  $-1/2$  puis croissante. Sur l'intervalle  $[-3, 0]$ , son maximum est atteint en  $-3$  ou en  $0$ . Or  $u(0) = 0$  et  $u(-3) = (-3)^2 - 3 = 6$ . Ainsi, le maximum de  $f$  sur  $[OA]$  est 6, atteint au point  $A$ . Considérons maintenant un point  $(x, y)$  sur le segment  $[OB]$ , on a alors  $x = 0$  et  $y \in [-3, 0]$  donc :

$$f(x, y) = f(0, y) = y^2 + y$$

L'étude précédente montre que cette quantité est maximale pour  $y = -3$ . Ainsi, le maximum de  $f$  sur  $[OB]$  est 6, atteint au point  $B$ . Si le point  $(x, y)$  est sur le segment  $[AB]$ , alors  $y = -3 - x$  avec  $x \in [-3, 0]$  donc :

$$f(x, y) = f(x, -3 - x) = 3x^2 + 9x + 6$$

On pose  $v(x) = 3x^2 + 9x + 6$ , la fonction  $v$  est polynomiale et  $v'(x) = 6x + 9$ . Ainsi  $v'$  s'annule en  $-3/2$  et  $v$  est décroissante jusqu'à  $-3/2$  puis croissante. La fonction  $v$  est donc maximale soit en  $-3$  soit en  $0$  or  $v(0) = 6$  et  $v(-3) = 6$  donc le maximum de  $v$  sur  $[-3, 0]$  est 6. Le maximum de  $f$  sur  $[AB]$  est 6, atteint en  $A$  et en  $B$ .

- (e) Il y a deux cas possibles :

- Soit  $(x_0, y_0) \in F$ , dans ce cas le maximum de  $F$  est atteint sur l'un des segments  $[OA]$ ,  $[OB]$ ,  $[OC]$ . D'après l'étude précédente il est atteint soit en  $A$  ou  $B$  donc  $(x_0, y_0) \in \{A, B\}$ .
- Soit  $(x_0, y_0) \in V$ , dans ce cas  $f$  admet un maximum sur  $V$ . Comme  $V$  est ouvert et  $f$  est de classe  $C^1$ , ce maximum est nécessairement atteint en un point critique de  $f$ , donc en  $C = (-1, -1)$  et ainsi  $(x_0, y_0) = (-1, -1)$ .

On a donc  $(x_0, y_0) \in \{A, B, C\}$ . Les valeurs de  $f$  en ces points sont 6 et  $-1$ , le maximum de  $f$  sur  $T$  est donc égal à 6 et il est atteint en  $A$  et  $B$ .

**Exercice 5** *Un minimum sur un fermé borné.* On considère la fonction  $f$  et l'ensemble  $D$  définis par :

$$f : (x, y) \mapsto \sqrt{1 + x^2 + y^2} - y^2$$

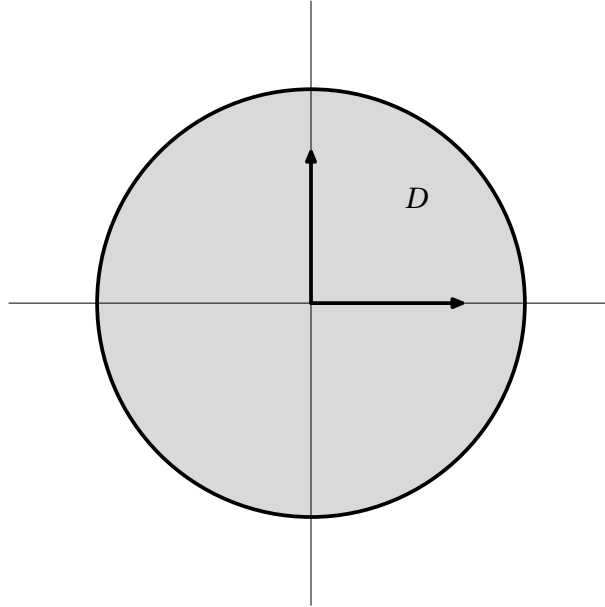
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$$

Représenter graphiquement l'ensemble  $D$ . Démontrer que  $f$  admet un minimum sur  $D$  et le déterminer.

## II. Application : recherche d'extrémums

Réponse :

Un point  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  appartient à  $D$  si, et seulement si, sa distance à l'origine est inférieure à  $\sqrt{2}$ . Ainsi  $D$  est le disque (fermé) de centre  $O$  et de rayon  $\sqrt{2}$ .



Étant un disque fermé, l'ensemble  $D$  est un fermé borné de  $\mathbb{R}^2$ . La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$  comme somme de composées de fonctions continues donc  $f$  admet un minimum sur  $D$ . On note pour la suite  $(x_0, y_0) \in D$  un point où  $f$  atteint son minimum. La fonction  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  comme somme de composées de fonctions de classe  $C^1$  et pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} - 2y\end{aligned}$$

On détermine les points critiques de  $f$  :

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = 0 \\ y/\sqrt{1+x^2+y^2} - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2y\sqrt{1+y^2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \left( x = y = 0 \text{ ou } \begin{cases} x = 0 \\ 1 = 2\sqrt{1+y^2} \end{cases} \right)\end{aligned}$$

La dernière équation ne possède pas de solution puisque  $2\sqrt{1+y^2} \geq 2 > 1$ . L'application  $f$  possède donc un seul point critique, c'est le point  $O = (0, 0)$ . Un point  $(x, y) \in D$  appartient au cercle de centre  $O$  et de rayon  $\sqrt{2}$ , il existe donc  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $x = \sqrt{2}\cos\theta$  et  $y = \sqrt{2}\sin\theta$  donc :

$$f(x, y) = f(\sqrt{2}\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta) = \sqrt{1+2} - 2\sin^2\theta = \sqrt{3} - 2\sin^2\theta$$

Cette expression donne les valeurs prises par  $f$  sur  $C$ . Il est clair que cette quantité est minimale lorsque  $\sin^2 \theta$  est maximal, donc égal à 1. Ainsi, le minimum de  $f$  sur  $C$  est atteint aux points  $A = (0, \sqrt{2})$  et  $B = (0, -\sqrt{2})$  et il vaut  $\sqrt{3} - 2$ . On distingue alors deux cas :

- Si  $(x_0, y_0) \in V$ , alors  $f$  admet un minimum sur  $V$ . Comme  $V$  est ouvert et  $f$  est de classe  $C^1$ , ce minimum est nécessairement atteint en un point critique de  $f$ . Comme  $f$  ne possède qu'un seul point critique, on a  $(x_0, y_0) = O$ ;
- Si  $(x_0, y_0) \in C$ , alors le minimum de  $f$  est atteint sur  $C$ , donc soit au point  $A$  soit au point  $B$ .

On en déduit que  $(x_0, y_0) \in \{A, B, O\}$ . Les valeurs de  $f$  en ces points sont  $\sqrt{3} - 2$  et 1, le minimum de  $f$  sur  $D$  est donc égal à  $\sqrt{3} - 2$  et il est atteint en  $A$  et  $B$ .

**Exercice 6** *Extrémums sur  $\mathbb{R}^2$* . On considère la fonction :

$$f : (x, y) \mapsto x^3 - 3x(1 + y^2)$$

On a déterminé dans l'exercice 3 que  $f$  possède exactement deux points critiques qui sont  $(1, 0)$  et  $(-1, 0)$ .

- Étudier le signe (strict) de l'expression  $f(1 + t, 0) - f(1, 0)$  pour  $t$  au voisinage de 0. Étudier ensuite le signe (strict) de l'expression  $f(1, t) - f(1, 0)$  pour  $t$  au voisinage de 0. La fonction  $f$  admet-elle un extrémum local en  $(1, 0)$ ?
- Étudier de même si  $f$  possède un extrémum local en  $(-1, 0)$ .

*Réponse :*

- Pour un réel  $t$  :

$$f(1 + t, 0) - f(1, 0) = 3t^2 + t^3 = t^2(3 + t)$$

Cette quantité est strictement positive pour  $t$  au voisinage de 0,  $t \neq 0$ , donc  $f(1 + t, 0) > f(1, 0)$  pour  $t$  au voisinage de 0,  $t \neq 0$ . On trouve de même :

$$f(1, t) - f(1, 0) = -3t^2$$

Cette quantité est strictement négative pour  $t$  au voisinage de 0,  $t \neq 0$ , donc  $f(1, t) < f(1, 0)$  pour  $t$  au voisinage de 0,  $t \neq 0$ . On en déduit que  $f$  ne possède pas d'extrémum local en  $(1, 0)$ .

- On peut procéder de même en considérant  $f(-1 + t, 0) - f(-1, 0)$  et  $f(-1, t) - f(-1, 0)$ . On peut plus simplement utiliser les symétries de  $f$ . En effet :

$$f(-x, y) = (-x)^3 + 3x(1 + y^2) = -f(x, y)$$

Et comme  $f$  ne possède pas d'extrémum local en  $(1, 0)$ , elle n'en possède pas non plus en  $(-1, 0)$ .



### III. Applications géométriques

◇ Une équation de la forme  $f(x, y) = 0$  définit *en général* une courbe du plan (en général car des équations telles que  $x^2 + y^2 = 0$ ,  $x^2 + y^2 = -1$ ,  $xy = 0$ , etc. ne définissent pas vraiment des courbes). Dans la suite, on supposera implicitement que les équations données définissent bien des courbes. On va aussi considérer des surfaces de l'espace définies par des équations  $f(x, y, z) = 0$ .

#### Proposition 9 – Tangente en un point régulier

Soit  $\Gamma$  la courbe d'équation  $f(x, y) = 0$  avec  $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ . Si  $(x_0, y_0)$  est un point de  $\Gamma$  et si  $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$ , alors on dit que  $(x_0, y_0)$  est un point régulier de la courbe  $\Gamma$  et, dans ce cas, la droite passant par  $(x_0, y_0)$  et de vecteur normal  $\nabla f(x_0, y_0)$  est la tangente à  $\Gamma$  en  $(x_0, y_0)$ . C'est la droite d'équation :

$$(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

#### Proposition 10 – Plan tangent en un point régulier

Soit  $\mathcal{S}$  la surface d'équation  $f(x, y, z) = 0$  avec  $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ . Si  $(x_0, y_0, z_0)$  est un point de  $\mathcal{S}$  et si  $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ , alors on dit que  $(x_0, y_0, z_0)$  est un point régulier de la surface  $\mathcal{S}$  et, dans ce cas, le plan passant par  $(x_0, y_0, z_0)$  et de vecteur normal  $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$  est le plan tangent à  $\mathcal{S}$  en  $(x_0, y_0, z_0)$ . C'est le plan d'équation :

$$(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$$

**Exercice 7** Tangente à une courbe. On considère la courbe  $\mathcal{C}$  d'équation

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

- Si  $(x_0, y_0)$  est un point de la courbe  $\mathcal{C}$ , montrer que ce point est régulier et déterminer une équation de la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $(x_0, y_0)$ .
- Déterminer les points de  $\mathcal{C}$  où la tangente est parallèle à l'un des axes de coordonnées.

Réponse :

On considère la fonction  $f : (x, y) \mapsto \frac{x^2}{4} + y^2 - 1$ .

- La fonction  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  comme somme de produits de fonctions de classe  $C^1$  et pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :

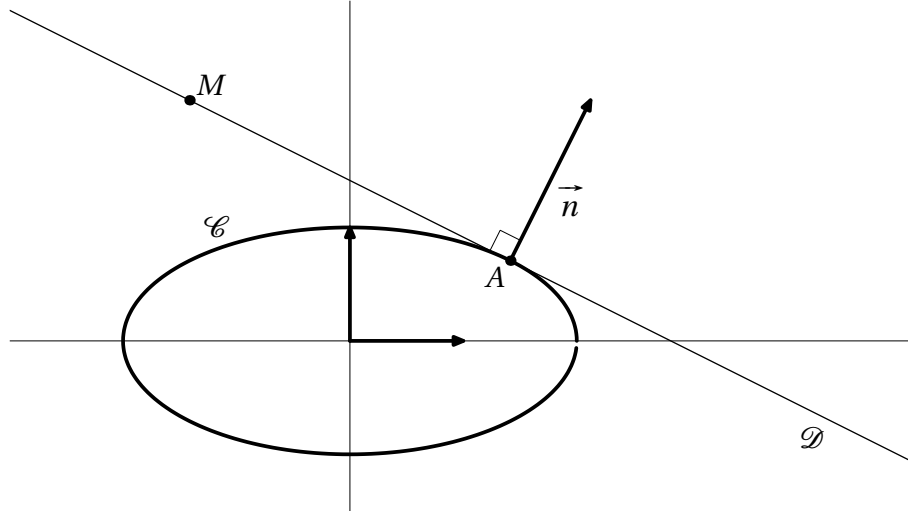
$$\nabla f(x, y) = \left( \frac{x}{2}, 2y \right)$$

Le seul point critique de  $f$  est  $(0, 0)$  or ce point ne vérifie par l'équation  $f(x, y) = 0$ , il n'appartient donc pas à la courbe  $\mathcal{C}$ . Ainsi, tous les points de  $\mathcal{C}$  sont réguliers. Considérons un point  $A = (x_0, y_0)$  de  $\mathcal{C}$ , la tangente à ce point est la droite

$\mathcal{D}$  passant par  $(x_0, y_0)$  et de vecteur normal

$$\vec{n} = \nabla f(x_0, y_0) = \left( \frac{x_0}{2}, 2y_0 \right)$$

On peut donner directement une équation de cette droite en appliquant le résultat du cours mais on peut aussi la retrouver.



Considérons un point  $M = (x, y)$  quelconque, alors :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \\ &\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle = 0 \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{AM} = (x - x_0, y - y_0), \quad \vec{n} = \left( \frac{x_0}{2}, 2y_0 \right) \\ &\Leftrightarrow \frac{x_0}{2}(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) = 0 \end{aligned}$$

La droite  $\mathcal{D}$  a pour équation  $\frac{x_0}{2}(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) = 0$ .

- (b) La tangente est parallèle à l'un des axes de coordonnées lorsque le vecteur  $\vec{n}$  est horizontal ou vertical, autrement dit lorsque l'une des coordonnées de  $\vec{n}$  est nulle. Les points considérés sont donc les points de  $\mathcal{C}$  pour lesquels  $x = 0$  ou  $y = 0$ . On trouve qu'il y a quatre points qui conviennent  $(\pm 2, 0)$  et  $(0, \pm 1)$ .

**Exercice 8** Surface  $f(x, y, z) = 0$ . On considère la surface  $\mathcal{S}$  d'équation  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ .

- (a) Démontrer que tout point  $M$  de  $\mathcal{S}$  est régulier et déterminer un vecteur normal au plan tangent à  $\mathcal{S}$  en  $M$ .  
 (b) Déterminer les points  $\mathcal{S}$  en lesquels le vecteur normal est parallèle au vecteur de coordonnées  $(3, 2, 1)$ .

*Réponse :*

On considère la fonction  $f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 - z^2 - 1$ .

- (a) La fonction  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^3$  comme somme de produits de fonctions de classe  $C^1$  et pour  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  :

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, -2z)$$

### III. Applications géométriques

Le seul point critique de  $f$  est le point  $(0, 0, 0)$ , or ce point ne vérifie par l'équation  $f(x, y, z) = 0$ , il n'appartient donc pas à la surface  $\mathcal{S}$ . Ainsi, tous les points de  $\mathcal{S}$  sont réguliers. Considérons un point  $A = (x_0, y_0, z_0)$  de  $\mathcal{S}$ , le plan tangent à  $\mathcal{S}$  en  $A$  a alors pour vecteur normal le vecteur

$$\vec{n} = \nabla f(x_0, y_0, z_0) = (2x_0, 2y_0, -2z_0)$$

On pourrait déterminer une équation de ce plan, soit en utilisant le même raisonnement que dans l'exercice précédent, soit en appliquant directement le résultat du cours.

- (b) Un point  $M = (x, y, z)$  quelconque est un point de  $\mathcal{S}$  en lequel le vecteur normal au plan tangent est parallèle à  $\vec{u} = (3, 2, 1)$  si, et seulement si,  $M$  vérifie les conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} M \in \mathcal{S} \\ \nabla f(x, y, z) \in \text{Vect}(\vec{u}) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ \nabla f(x, y, z) \wedge \vec{u} = \vec{0} \end{array} \right.$$

Or :

$$\nabla f(x, y, z) \wedge \vec{u} = (2y + 4z, -2x - 6z, 4x - 6y)$$

Par conséquent :

$$\left\{ \begin{array}{l} M \in \mathcal{S} \\ \nabla f(x, y, z) \in \text{Vect}(\vec{u}) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ 2y + 4z = 0 \\ 2x + 6z = 0 \\ 4x - 6y = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ x = -3z \\ y = -2z \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 12z^2 = 1 \\ x = -3z \\ y = -2z \end{array} \right.$$

La première ligne donne  $z = \pm \frac{1}{\sqrt{12}} = \pm \frac{1}{2\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$ , on trouve donc deux solutions :

$$(x, y, z) = \left( -\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{6}\sqrt{3} \right)$$

$$(x, y, z) = \left( \frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{6}\sqrt{3} \right)$$

## IV. Dérivée d'une composée

♦ Les formules pour dériver des composées de fonctions de plusieurs variables sont délicates. On donne deux situations, chacune précédée par une explication intuitive.

♦ On considère une fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  ainsi que deux fonctions  $x : t \mapsto x(t)$  et  $y : t \mapsto y(t)$  de classe  $C^1$ . On pourra donc considérer  $f(x, y)$  (dépendant de deux variables  $x$  et  $y$ ) ou  $f(x(t), y(t))$  dépendant d'une seule variable  $t$ . On veut établir un lien entre les quantités

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{df(x(t), y(t))}{dt}, \quad \frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}$$

On considère pour cela  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  et on écrit de DL<sub>1</sub> de  $f$  en ce point. Pour  $(x, y)$  proche de  $(x_0, y_0)$  :

$$f(x, y) \simeq f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

(pour simplifier, on omet le terme en petit o). Considérons  $t_0$  et  $t$  des réels avec  $t$  proche de  $t_0$ . On applique ce DL<sub>1</sub> en remplaçant  $(x_0, y_0)$  par  $(x(t_0), y(t_0))$  et en remplaçant  $(x, y)$  par  $(x(t), y(t))$  :

$$f(x(t), y(t)) \simeq f(x(t_0), y(t_0)) + (x(t) - x(t_0)) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0)) + (y(t) - y(t_0)) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y(t_0))$$

Or on a  $x(t) - x(t_0) \simeq (t - t_0)x'(t_0)$  et  $y(t) - y(t_0) \simeq (t - t_0)y'(t_0)$  donc :

$$f(x(t), y(t)) \simeq f(x(t_0), y(t_0)) + (t - t_0)x'(t_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0)) + (t - t_0)y'(t_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y(t_0))$$

On a donc :

$$\frac{f(x(t), y(t)) - f(x(t_0), y(t_0))}{t - t_0} \simeq x'(t_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0)) + y'(t_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y(t_0))$$

Ce qui donne en faisant tendre  $t$  vers  $t_0$  :

$$\left. \frac{df(x(t), y(t))}{dt} \right|_{t=t_0} = x'(t_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0)) + y'(t_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y(t_0))$$

#### IV. Dérivée d'une composée

##### Proposition 11 – Dérivée d'une composée / Règle de la chaîne (1)

Soient  $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ ,  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions de classe  $C^1$  telles que :

$$\forall t \in I, (x(t), y(t)) \in U$$

On peut donc considérer la composée :

$$\begin{aligned} \tilde{f} : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(x(t), y(t)) \end{aligned}$$

( $\tilde{f}$  représente la fonction obtenue à partir de  $f$  en l'appliquant avec  $x(t)$  et  $y(t)$ ). La fonction  $\tilde{f}$  est de classe  $C^1$  sur  $I$  et :

$$\forall t \in I, \tilde{f}'(t) = \frac{df(x(t), y(t))}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t)$$

On note parfois ceci de manière plus concise :

$$\frac{d\tilde{f}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

**Remarque.** La notation encore plus concise :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

(qui consiste à confondre  $f$  et  $\tilde{f}$ ) n'est pas recommandée en mathématiques. □

**Remarque.** On peut adapter ceci au cas d'une fonction de trois variables. □

#### Exercice 9.

- (a) On considère une fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  ainsi que les fonctions  $x : t \in \mathbb{R} \mapsto \cos(t)$  et  $y : t \in \mathbb{R} \mapsto \sin(t)$ . Justifier que la fonction

$$\tilde{f} : t \mapsto f(x(t), y(t))$$

est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et exprimer sa dérivée à l'aide de  $\cos$ ,  $\sin$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

- (b) On considère la fonction

$$g : (x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2$$

ainsi que deux fonctions  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ . Justifier que la fonction

$$\tilde{g} : t \mapsto g(x(t), y(t))$$

est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et exprimer sa dérivée à l'aide de  $x(t)$ ,  $x'(t)$ ,  $y(t)$  et  $y'(t)$ .

Réponse :

- (a) La fonction  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ , les fonctions  $x$  et  $y$  sont de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  donc  $\tilde{f}$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \tilde{f}'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t) \\ &= -\frac{\partial f}{\partial x}(\cos(t), \sin(t))\sin(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\cos(t), \sin(t))\cos(t)\end{aligned}$$

- (b) La fonction  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  comme somme de produits de fonctions de classe  $C^1$ , les fonctions  $x$  et  $y$  sont de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  donc  $\tilde{g}$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \tilde{g}'(t) &= \frac{\partial g}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial g}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t) \\ &= (2x(t) + y(t))x'(t) + (2y(t) + x(t))y'(t)\end{aligned}$$

$$\text{car } \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2x + y \text{ et } \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = x + 2y.$$

◇ On considère une fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  ainsi que deux fonctions  $x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ . Les fonctions  $x$  et  $y$  dépendent de deux variables que l'on notera ici  $u$  et  $v$  (dans beaucoup de cas, il s'agit de  $r$  et  $\theta$  car on utilise des coordonnées polaires). On pourra donc considérer  $f(x, y)$  (dépendant de deux variables  $x$  et  $y$ ) ou  $f(x(u, v), y(u, v))$  dépendant des deux variables  $u$  et  $v$ . On veut établir un lien entre les quantités

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f(x(u, v), y(u, v))}{\partial u}, \quad \frac{\partial f(x(u, v), y(u, v))}{\partial v}, \quad \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial y}{\partial v}$$

On procède de la même manière que pour le cas précédent. Tout d'abord :

$$\begin{aligned}f(x, y) &\simeq f(x_0, y_0) \\ &\quad + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ &\quad + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\end{aligned}$$

(on l'écrit sur plusieurs lignes pour que cela reste lisible dans la suite). Ensuite on applique en  $(x_0, y_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))$  et  $(x, y) = (x(u, v), y(u, v))$  :

$$\begin{aligned}f(x(u, v), y(u, v)) &\simeq f(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)) \\ &\quad + (x(u, v) - x(u_0, v_0)) \frac{\partial f}{\partial x}(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)) \\ &\quad + (y(u, v) - y(u_0, v_0)) \frac{\partial f}{\partial y}(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))\end{aligned}$$

#### IV. Dérivée d'une composée

On va juste faire une variation sur  $u$ , on prend donc  $v = v_0$  :

$$\begin{aligned} f(x(u, v_0), y(u, v_0)) - f(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)) &\simeq (x(u, v_0) - x(u_0, v_0)) \frac{\partial f}{\partial x}(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)) \\ &\quad + (y(u, v_0) - y(u_0, v_0)) \frac{\partial f}{\partial y}(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)) \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} x(u, v_0) - x(u_0, v_0) &\simeq (u - u_0) \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) \\ y(u, v_0) - y(u_0, v_0) &\simeq (u - u_0) \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) \end{aligned}$$

donc en remplaçant :

$$\begin{aligned} f(x(u, v_0), y(u, v_0)) - f(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)) &\simeq (u - u_0) \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)) \\ &\quad + (u - u_0) \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)) \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \frac{f(x(u, v_0), y(u, v_0)) - f(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))}{u - u_0} &\simeq \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)) \\ &\quad + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)) \end{aligned}$$

Finalement, en faisant tendre  $u$  vers  $u_0$  on obtiendra :

$$\left. \frac{\partial f(x(u, v), y(u, v))}{\partial u} \right|_{u_0, v_0} = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)) + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))$$

et on aura une formule analogue pour  $\frac{\partial f(x(u, v), y(u, v))}{\partial v}$ .

Soient  $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ ,  $V$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $x : V \rightarrow \mathbb{R}$  et  $y : V \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions de classe  $C^1$  telles que :

$$\forall (u, v) \in V, (x(u, v), y(u, v)) \in U$$

On peut donc considérer la composée :

$$\begin{aligned} \tilde{f} : V &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto f(x(u, v), y(u, v)) \end{aligned}$$

La fonction  $\tilde{f}$  est de classe  $C^1$  sur  $V$  et pour  $(u, v) \in V$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{aligned}$$

On utilise parfois la notation plus concise :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \end{aligned}$$

**Exercice 10** Le cas important des coordonnées polaires. On considère une fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  ainsi que les fonctions  $x$  et  $y$  définies par :

$$\begin{aligned} x : \mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & y : \mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (r, \theta) &\mapsto r \cos \theta & (r, \theta) &\mapsto r \sin \theta \end{aligned}$$

On définit alors la fonction composée :

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (r, \theta) &\mapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta) \end{aligned}$$

Justifier que  $\tilde{f}$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}$ . Exprimer les dérivées partielles de  $\tilde{f}$  en utilisant celles de  $f$ .

*Réponse :*

Les fonctions  $x$  et  $y$  sont de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}$  comme somme de produits de fonctions de classe  $C^1$  et  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ , par conséquent  $\tilde{f}$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}$  et pour  $(r, \theta) \in \mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(r, \theta), y(r, \theta)) \frac{\partial x}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(r, \theta), y(r, \theta)) \frac{\partial y}{\partial r}(r, \theta) \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r, \theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(r, \theta), y(r, \theta)) \frac{\partial x}{\partial \theta}(r, \theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(r, \theta), y(r, \theta)) \frac{\partial y}{\partial \theta}(r, \theta) \end{aligned}$$



#### IV. Dérivée d'une composée

Or :

$$\frac{\partial x}{\partial r}(r, \theta) = \cos \theta \quad \frac{\partial x}{\partial \theta}(r, \theta) = -r \sin \theta \quad \frac{\partial y}{\partial r}(r, \theta) = \sin \theta \quad \frac{\partial y}{\partial \theta}(r, \theta) = r \cos \theta$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r, \theta) &= -\frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) r \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) r \cos \theta \end{aligned}$$

## V. Fonctions de classe $C^2$

**Notation :** Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . On définit les dérivées partielles secondes en posant (sous réserve d'existence) :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

□

### Définition 13 – Fonction de classe $C^2$

Une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  est dite de classe  $C^2$  lorsque les dérivées partielles secondes existent en tout point de  $U$  et sont continues sur  $U$ . On note  $C^2(U, \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions définies et de classe  $C^2$  sur  $U$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

### Théorème 14 – Schwarz

Si  $f \in C^2(U)$ , alors  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ .

---

## VI. Équations aux dérivées partielles (EDP)

Les EDP « simples »

**Exemple.** Déterminer les fonctions  $f$  de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  telles que :

$$(E) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$$

On note en général plus simplement :

$$(E) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Les solutions de  $(E)$  sont les fonctions  $f$  indépendantes de  $x$ . Plus précisément, les solutions de  $(E)$  sont les fonctions  $f$  de la forme

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto C(y) \end{aligned}$$

avec  $C$  une fonction (d'une seule variable) définie sur  $\mathbb{R}$  et nécessairement de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  pour que  $f$  soit de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

→ Justification rigoureuse (non nécessaire en pratique sur cet exemple). On considère  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ . Pour  $y \in \mathbb{R}^2$ , on définit la fonction :

$$g_y: x \in \mathbb{R} \mapsto f(x, y)$$

Ainsi,  $g$  est une fonction d'une seule variable,  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'_y(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} f \text{ sol. de } (E) &\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad g'_y(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}, \quad g_y \text{ est cste sur } \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}, \exists C_y \in \mathbb{R}, \quad g_y \text{ est égale à } C_y \\ &\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}, \exists C(y) \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x, y) = C(y) \end{aligned}$$

□

**Exemple.** Déterminer les fonctions  $f$  de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$  telles que :

$$(E) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1$$

L'idée est d'intégrer par rapport à  $x$  et d'ajouter une « constante » par rapport à  $x$ , donc une fonction dépendant de  $y$ . Les solutions de  $(E)$  sont les fonctions  $f$  de la forme

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x + u(y) \end{aligned}$$

avec  $u$  nécessairement de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  pour que  $f$  soit de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$ . □

**Exemple.** Déterminer les fonctions  $f$  de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$  telles que :

$$(E) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos(x)$$

L'idée est d'intégrer par rapport à  $x$  et d'ajouter une « constante » par rapport à  $x$ , donc une fonction dépendant de  $y$ . Les solutions de  $(E)$  sont les fonctions  $f$  de la forme

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \sin(x) + u(y) \end{aligned}$$

avec  $u$  nécessairement de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  pour que  $f$  soit de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ . □

**Exemple.** Déterminer les fonctions  $f$  de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  telles que :

$$(E) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f(x, y)$$

Si on fixe  $y$ , on obtient une équation différentielle d'ordre 1 par rapport à  $x$  dont les solutions s'écrivent :

$$f(x, y) = Ce^x$$

Mais la constante  $C$  peut dépendre de la valeur de  $y$ . Les solutions de  $(E)$  sont donc les fonctions  $f$  de la forme

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto C(y)e^x \end{aligned}$$

avec  $C$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  pour que  $f$  soit de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

→ Justification rigoureuse (non nécessaire en pratique sur cet exemple). On considère  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ . Pour  $y \in \mathbb{R}^2$ , on définit la fonction :

$$g_y : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x, y)$$

Ainsi,  $g$  est une fonction d'une seule variable,  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'_y(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} f \text{ sol. de } (E) &\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad g'_y(x) = g_y(x) \\ &\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}, \quad g_y \text{ est solution de } z' - z = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}, \exists C_y \in \mathbb{R}, \quad g_y \text{ est la fonction } x \mapsto C_y e^x \\ &\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}, \exists C(y) \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad g_y(x) = C(y)e^x \end{aligned}$$

□

## VI. Équations aux dérivées partielles (EDP)

**Exemple.** Déterminer les fonctions de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$$

En reprenant les raisonnements précédents, on voit que  $\partial f / \partial y$  doit être indépendante de  $x$ , donc :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = c(y)$$

avec  $c$  de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ . La fonction  $f$  doit donc être de la forme :

$$f(x, y) = C(y) + D(x)$$

avec  $C$  une primitive de  $c$  et  $D$  de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ . □

Remarques sur les changements de variables en coordonnées polaires

**Exemple.** Si  $(x, y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$  (demi-plan situé à droite de l'axe des ordonnées) et si on note  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$  avec  $r > 0$  et  $\theta \in ]-\pi/2, \pi/2[$ , alors :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$

(d'autres choix sont possibles, on peut par exemple utiliser arcsin). □

**Exemple.** Si  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$  (demi-plan situé au dessus de l'axe des abscisses) et si on note  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$  avec  $r > 0$  et  $\theta \in ]0, \pi[$ , alors :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arccos \frac{x}{r} = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
□

**Exemple.** Si  $(x, y) \in \mathbb{R}^{-*} \times \mathbb{R}$  (demi-plan situé à gauche de l'axe des ordonnées) et si on note  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$  avec  $r > 0$  et  $\theta \in ]\pi/2, 3\pi/2[$ , alors :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \pi + \arctan \frac{y}{x}$$
□

**Exemple.** Si  $(x, y) \in \mathbb{R}^{-*} \times \mathbb{R}^{+*}$  (quart de plan supérieur droit) et si on note  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$  avec  $r > 0$  et  $\theta \in ]0, \pi/2[$ , alors :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$

(d'autres choix sont possibles, on peut par exemple utiliser arcsin ou arccos). □

**Remarque.** Si on a simplement  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , il est toujours possible d'écrire  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$  avec  $r \geq 0$  et on peut même imposer  $\theta \in ]-\pi, \pi]$  ou  $\theta \in [0, 2\pi[$  mais il n'est plus possible d'exprimer simplement  $r$  et  $\theta$  en fonction de  $x$  et  $y$ .  $\square$

**Remarque.** (Peu utile en pratique.) Il existe cependant une formule un peu plus générale que les précédentes. On pose :

$$U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) / x \in \mathbb{R}^-\}$$

Si  $(x, y) \in U$  et si on note  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$  avec  $r > 0$  et  $\theta \in ]-\pi, \pi[$ , alors :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = 2 \arctan \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Pour justifier cette dernière expression, posons  $\theta = 2\alpha$ , on a :

$$\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r \sin \theta}{r \cos \theta + r} = \frac{\sin(2\alpha)}{1 + \cos(2\alpha)} = \tan \alpha \quad \square$$

Résolutions d'EDP par changement de variable

**Exemple.** Déterminer les fonctions  $f$  de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$  solutions de :

$$(E) \quad y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = x(x^2 + y^2)$$

→ On considère  $f : \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ . On définit :

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \mathbb{R}^{+*} \times ]-\pi/2, \pi/2[ &\rightarrow \mathbb{R} \\ (r, \theta) &\mapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta) \end{aligned}$$

Alors, par composition,  $\tilde{f}$  est de classe  $C^1$ . Dans la suite, pour alléger les notations :

- On note toujours  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ;
- On suppose toujours implicitement  $x > 0$ ,  $y \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$  et  $\theta \in ]-\pi/2, \pi/2[$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y} = -y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

Alors :

$$f \text{ sol. de } (E) \Leftrightarrow y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = x(x^2 + y^2) \Leftrightarrow -\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} = r^3 \cos \theta \quad (\tilde{E})$$

## VI. Équations aux dérivées partielles (EDP)

Les solutions de  $(\tilde{E})$  sont les fonctions :

$$\tilde{f} : (r, \theta) \mapsto -r^3 \sin \theta + C(r)$$

avec  $C$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . On a  $r^3 \sin \theta = r^2 r \sin \theta = r^2 y$  donc les solutions de  $(E)$  sont les fonctions :

$$f : (x, y) \mapsto -(x^2 + y^2)y + C(\sqrt{x^2 + y^2})$$

□

**Exemple.** On considère l'ouvert  $U = (\mathbb{R}^{+*})^2$ . En utilisant les variables  $u$  et  $v$  définies par :

$$\begin{cases} u = xy \\ v = x/y \end{cases}$$

déterminer les fonctions  $f$  de classe  $C^1$  sur  $U$  qui sont solutions de :

$$(E) \quad x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

→ On utilise les relations  $u = xy$  et  $v = x/y$ , on a alors :

$$\begin{aligned} uv &= x^2 \\ \frac{u}{v} &= y^2 \end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{uv} \\ y &= \sqrt{\frac{u}{v}} \end{aligned}$$

Soit  $f : (\mathbb{R}^{+*})^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ . On définit :

$$\tilde{f} : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^{+*})^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (u, v) & \mapsto & f(\sqrt{uv}, \sqrt{u/v}) \end{array}$$

Par composition, la fonction  $\tilde{f}$  est de classe  $C^1$ . Dans la suite, pour alléger les notations :

- On note toujours  $x = \sqrt{uv}$  et  $y = \sqrt{u/v}$ ;
- De manière équivalente, on a toujours  $u = xy$  et  $v = x/y$ ;
- On suppose toujours implicitement  $x, y, u$  et  $v$  strictement positifs.

On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = y \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} + \frac{1}{y} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = x \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} - \frac{x}{y^2} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \frac{x}{y} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}$$

Ainsi :

$$f \text{ sol. de } (E) \Leftrightarrow x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow 2 \frac{x}{y} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} = 0 \quad (\tilde{E})$$

Les solutions de  $(\tilde{E})$  sont les fonctions :

$$\tilde{f} : (u, v) \mapsto C(u)$$

avec  $C$  de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . Avec  $u = xy$ , on obtient que les solutions de  $(E)$  sont les fonctions :

$$f : (x, y) \mapsto C(xy)$$

avec  $C$  de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . □

**Exemple.** Équation des ondes planes. Soit  $c > 0$ . On veut démontrer que les fonctions  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  satisfaisant l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

sont les fonctions qui s'écrivent :

$$f(x, y) = \Phi(x - ct) + \Psi(x + ct)$$

avec  $\Phi, \Psi$  de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ .

→ **Attention :** les variables de départ sont ici  $x$  et  $t$ . On considère les variables  $u$  et  $v$  définies par :

$$\begin{aligned} u &= x - ct \\ v &= x + ct \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} x &= \frac{u + v}{2} \\ t &= \frac{v - u}{2c} \end{aligned}$$

On considère  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  et on définit :

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto f\left(\frac{u + v}{2}, \frac{v - u}{2c}\right) \end{aligned}$$

Par composition, la fonction  $\tilde{f}$  est de classe  $C^2$ . Dans la suite, pour alléger les notations :

- On note toujours  $u = x - ct$ ,  $v = x + ct$ ;



## VI. Équations aux dérivées partielles (EDP)

- De manière équivalente, on a toujours  $x = \frac{u+v}{2}$  et  $t = \frac{v-u}{2c}$ .

On a alors :

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial u} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2c} \frac{\partial f}{\partial t}$$

On dérive à nouveau maintenant par rapport à  $v$ . Notons que, comme les fonctions  $f$  et  $\tilde{f}$  sont de classe  $C^2$ , l'ordre des dérivations n'a pas d'importance (théorème de Schwarz) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial v \partial u} &= \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2c} \frac{\partial f}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) - \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} \frac{\partial t}{\partial v} \right) - \frac{1}{2c} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \frac{\partial t}{\partial v} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{2c} \frac{\partial f}{\partial t \partial x} \right) - \frac{1}{2c} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \frac{1}{2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \frac{1}{2c} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial v \partial u} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} \text{ ne dépend pas de } v \end{aligned}$$

Les solutions  $\tilde{f}$  sont telles que :

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u, v) = \varphi(u)$$

avec  $\varphi$  de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ . On obtient  $\tilde{f}$  en intégrant par rapport à  $u$ . Notons  $\Phi$  une primitive de  $\varphi$ , les solutions  $\tilde{f}$  sont les fonctions :

$$\tilde{f} : (u, v) \mapsto \Phi(u) + \Psi(v)$$

avec  $\Phi$  et  $\Psi$  de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ . En revenant à  $x$  et  $t$ , les solutions  $f$  sont les fonctions

$$f : (x, t) \mapsto \Phi(x - ct) + \Psi(x + ct)$$

avec  $\Phi$  et  $\Psi$  de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ . □

## Fonction de classe $C^1$ « en un point »

◇ Un mot sur le fait de pouvoir dire qu'une fonction  $f$  est « de classe  $C^1$  au point  $a$ . » Pour simplifier, on considère une fonction  $f$  d'une seule variable.

◇ La notion «  $f$  est continue au point  $a$  » a un sens, cela signifie :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$$

De même, la notion «  $f$  est dérivable en  $a$  » a un sens, cela signifie :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} \text{une limite finie}$$

On peut donc parler de continuité et de dérivabilité en un point pour  $f$ . Mais, détail qui a son importance, pour pouvoir appliquer ces deux définitions il faut que  $f$  soit définie *au voisinage de  $a$*  et pas seulement en  $a$ .

◇ Quelle pourrait alors être la signification de «  $f$  est  $C^1$  en  $a$  » ? Intuitivement, on pourrait penser que cela signifie qu'il faut avoir les deux conditions : «  $f$  est dérivable en  $a$  » et «  $f'$  est continue en  $a$ . » Mais «  $f'$  est continue en  $a$  » signifie :

$$f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a)$$

Pour que ceci ait un sens, il ne faut donc pas juste que  $f$  soit dérivable en  $a$  mais qu'elle soit dérivable *au voisinage de  $a$* .

◇ Pour définir correctement «  $f$  est  $C^1$  en  $a$  », il faudrait donc donner la définition suivante : il existe un réel  $r > 0$  tel que  $f$  est dérivable sur  $]a - r, a + r[$  et  $f'$  est continue en  $a$ .

◇ En fait, dans tous les livres que j'ai consultés, cette définition n'est jamais donnée.

◇ *En pratique*, pour nous, on n'utilisera jamais «  $f$  est  $C^1$  en  $a$ . » En revanche, on peut utiliser «  $f$  est dérivable en  $a$  » et «  $f$  est continue en  $a$ . » Concernant le caractère  $C^1$ , on ne peut dire que «  $f$  est  $C^1$  sur... »

◇ Concernant les fonctions de plusieurs variables, la seule notion qui a un sens est «  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $U$  » avec  $U$  un ensemble ouvert.

## Corrections