

Correction

Problème I Une équation de Bessel

Partie 1 Série entière dont la somme est solution de (1)

1. Équation (1) : équation différentielle linéaire (homogène) du second ordre, les coefficients sont des fonctions continues, le coefficient de x'' ne s'annule pas sur $I =]0, +\infty[$. Théorème de Cauchy (linéaire) : l'ensemble des solutions de (1) sur $]0, +\infty[$ est un espace vectoriel de dimension 2.

2. Deux définitions acceptables du rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n x^n$:

Définition du cours, R est l'élément $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ défini par :

$$R = \sup \{r \geq 0 \mid (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$$

Définition « acceptable », R est l'élément $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tel que :

- Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument ;
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

3. La fonction J_0 est de classe C^∞ sur $] -R, R[$ et pour tout $x \in] -R, R[$:

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k, \quad J'_0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k c_k x^{k-1}, \quad J''_0(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) c_k x^{k-2}$$

$$\begin{aligned} x^2 J''_0(x) + x J'_0(x) + x^2 J_0(x) &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) c_k x^k + \sum_{k=1}^{+\infty} k c_k x^k + \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^{k+2} \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) c_k x^k + c_1 x + \sum_{k=2}^{+\infty} k c_k x^k + \sum_{k=2}^{+\infty} c_{k-2} x^k \\ &= c_1 x + \sum_{k=2}^{+\infty} (k(k-1) c_k + k c_k + c_{k-2}) x^k \\ &= 0 \quad \text{car } J_0 \text{ solution de (1) sur }] -R, R[\end{aligned}$$

Ceci est vrai quel que soit $x \in] -R, R[$ avec $R > 0$ donc par unicité du DSE :

$$c_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \geq 2, \quad k^2 c_k + c_{k-2} = 0$$

Par une récurrence immédiate, on a alors $c_{2k+1} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{H}(k) : c_{2k} = \frac{(-1)^k}{4^k (k!)^2} \quad (\text{hypothèse de récurrence})$$

Comme $c_0 = 1$, $\mathcal{H}(0)$ est vraie. Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{H}(k)$ vraie, alors :

$$c_{2(k+1)} = c_{2k+2} = \frac{-c_{2k}}{(2k+2)^2} = \frac{-(-1)^k}{4(k+1)^2 4^{k+1} (k!)^2} = \frac{(-1)^{k+1}}{4^{k+1} ((k+1)!)^2}$$

Donc $\mathcal{H}(k+1)$ est vraie. Par récurrence on obtient les expressions demandées.

4. La série entière obtenue est $\sum_{k \geq 0} c_{2k} x^{2k}$.

Méthode 1 : avec des comparaisons. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\left| c_{2k} x^{2k} \right| = \left| \frac{(-1)^k}{4^k (k!)^2} x^{2k} \right| = \frac{|x^2|^k}{4^k (k!)^2} \leq \frac{|x^2|^k}{k!}$$

série exponentielle $\sum |x^2|^k / k!$ convergente donc (comparaison séries à termes positifs), $\sum c_{2k} x^{2k}$ converge absolument donc converge. Ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $R = +\infty$.

Méthode 2 : en appliquant la règle de d'Alembert. C'est possible mais il faut le rédiger correctement.

Remarque sur la logique du sujet. On a supposé J_0 solution de (1), on a alors trouvé la valeur des coefficients c_k (question 3) et le rayon de convergence (question 4). En toute rigueur il s'agit d'une analyse et il faudrait rédiger la synthèse qui consisterait à vérifier qu'en prenant cette définition des coefficients c_k , la fonction J_0 est bien solution de (1). Le sujet ne s'attarde pas dessus (il suffirait de refaire les calculs de la question 3).

5. On considère des solutions à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On suppose (J_0, f) liée dans $C^2(]0, r[)$, i.e. il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ tel que $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ et :

$$\forall x \in]0, r[, \alpha J_0(x) + \beta f(x) = 0$$

Supposons $\beta = 0$, on a alors :

$$\forall x \in]0, r[, \alpha J_0(x) = 0$$

Comme J_0 est continue en 0 et $J_0(0) = 1$, on obtient en faisant tendre x vers 0 : $\alpha = 0$ d'où une contradiction. Nécessairement $\beta \neq 0$ et ainsi :

$$\forall x \in]0, r[, f(x) = -\frac{\alpha}{\beta} J_0(x)$$

La fonction J_0 est continue sur \mathbb{R} , elle est donc continue en 0 donc bornée au voisinage de 0 et f , proportionnelle à J_0 , est bornée au voisinage de 0.

Remarque, c'est probablement la contraposée de ce résultat que l'on utilisera : si f est solution de (1) et f n'est pas bornée au voisinage de 0, alors (J_0, f) est libre, donc (J_0, f) est une base de l'ensemble des solutions de (1) sur $]0, r[$.

Partie 2 Inverse d'une série entière non nulle en 0

6. Soit $\sum \beta_k x^k$ série entière solution, on forme le produit de Cauchy en posant pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_{n-k}$$

Posons $R = \min(R_\alpha, R_\beta) > 0$, alors d'après le cours :

$$\forall x \in]-R, R[, \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n x^n = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k \right) = 1$$

donc par unicité du développement en série entière :

$$\gamma_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \gamma_n = 0$$

ce qui donne exactement le système (2) puisque $\gamma_0 = \alpha_0 \beta_0$ et $\alpha_0 = 1$.

7. Comme $r \in]-R_\alpha, R_\alpha[$, la série $\sum \alpha_n r^n$ converge donc $\alpha_n r^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc la suite $(\alpha_n r^n)$ est bornée, i.e. il existe $M > 0$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, |\alpha_k r^k| \leq M$$

8. Les relations (2) définissent la suite (β_n) de manière unique puisque $\beta_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_{n-k} = \alpha_0 \beta_n + \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_{n-k} = 0 \quad \text{donc} \quad \beta_n = - \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_{n-k}$$

Les coefficients β_n sont donc définis de manière unique par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$\mathcal{H}(n) : r^n |\beta_n| \leq M(M+1)^{n-1} \quad (\text{hypothèse de récurrence})$$

Pour $n = 1$:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -\alpha_1 \beta_0 = -\alpha_1 \\ r |\beta_1| &= r |\alpha_1| \leq M = M(M+1)^{n-1} \end{aligned}$$

donc $\mathcal{H}(1)$ est vraie. Soit $n \geq 2$ et supposons $\mathcal{H}(1), \dots, \mathcal{H}(n-1)$ vraies, on a :

$$\begin{aligned} \beta_n &= - \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_{n-k} \\ r^n |\beta_n| &\leq \sum_{k=1}^n r^n |\alpha_k \beta_{n-k}| \quad (\text{inégalité triangulaire}) \\ &\leq \sum_{k=1}^n \underbrace{r^k |\alpha_k|}_{\leq M} \underbrace{r^{n-k} |\beta_{n-k}|}_{\leq M(M+1)^{n-k-1}} \\ &\leq M^2 M^{n-1} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{M+1} \right)^k \\ &\leq M^2 M^{n-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{M+1} \right)^k \\ &\leq M^2 M^{n-1} \frac{1}{M+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{M+1}} = M(M+1)^{n-1} \end{aligned}$$

donc $\mathcal{H}(n)$ est vraie. Par récurrence, on obtient le résultat demandé.

9. Posons $x_0 = \frac{r}{M+1}$, on a $x_0 > 0$ et :

$$|x_0^k \beta_k| \leq \frac{r^k}{(M+1)^k} \cdot \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k} = \frac{M}{M+1} \leq 1$$

La suite $(x_0^k \beta_k)$ est bornée, par définition du rayon de convergence, on a $R_\beta \geq x_0 > 0$, donc $R_\beta > 0$.

Remarque (à nouveau) sur la logique du sujet. On a considéré une série entière solution, on a obtenu des informations sur ses coefficients (question 6) puis sur le rayon de convergence (question 9). En toute rigueur il s'agit d'une analyse et il faudrait rédiger la synthèse. À nouveau, le sujet ne s'attarde pas dessus.

Partie 3 Ensemble des solutions de (1)

10. La fonction y est de classe C^2 sur $]0, r[$, pour $x \in]0, r[$:

$$y'(x) = \lambda'(x)J_0(x) + \lambda(x)J_0'(x), \quad y''(x) = \lambda''(x)J_0(x) + 2\lambda'(x)J_0'(x) + \lambda(x)J_0''(x)$$

$$\begin{aligned} x^2 y''(x) + x y'(x) + x^2 y(x) &= x^2 \lambda''(x)J_0(x) + 2x^2 \lambda'(x)J_0'(x) + x^2 \lambda(x)J_0''(x) + x \lambda'(x)J_0(x) + x \lambda(x)J_0'(x) + x^2 \lambda(x)J_0(x) \\ &= \lambda(x) \underbrace{(x^2 J_0''(x) + x J_0'(x) + x^2 J_0(x))}_{=0} + x (\lambda''(x)J_0(x) + 2x \lambda'(x)J_0'(x) + \lambda'(x)J_0(x)) \\ &= x (\lambda''(x)J_0(x) + 2x \lambda'(x)J_0'(x) + \lambda'(x)J_0(x)) \end{aligned}$$

Soit $z : x \in]0, r[\mapsto xJ_0(x)^2 \lambda'(x)$, elle est de classe C^1 sur $]0, r[$ et :

$$\begin{aligned} z'(x) &= J_0(x)^2 \lambda'(x) + 2x J_0'(x) J_0(x) \lambda'(x) + x J_0(x)^2 \lambda''(x) \\ &= J_0(x) (J_0(x) \lambda'(x) + 2x J_0'(x) \lambda'(x) + x J_0(x) \lambda''(x)) \end{aligned}$$

- Si y solution de (1) sur $]0, r[$, on a alors $z'(x) = 0$ pour $x \in]0, r[$.
- Si $z' = 0$ sur $]0, r[$, alors comme J_0 ne s'annule pas sur $]0, r[$:

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + x^2 y(x) = \frac{x}{J_0(x)} z'(x) = 0$$

donc y solution de (1) sur $]0, r[$.

11. D'après le cours, le produit de Cauchy de deux séries entières de rayons de convergence $+\infty$ a pour rayon de convergence $+\infty$. Ainsi, J_0^2 est somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$ et $J_0^2(0) = 1$.

12. Partie 2 : il existe une série entière $\sum u_n x^n$, somme u et rayon de convergence $R_u > 0$ telle que

$$\forall x \in]-R_u, R_u[, J_0^2(x) u(x) = 1$$

On en déduit en particulier $u_0 = 1$ et J_0 ne s'annule pas sur $]0, R_u[$ donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in]0, R_u[, u(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \frac{1}{J_0^2(x)} \\ \forall x \in]0, R_u[, \frac{1}{x J_0^2(x)} &= \frac{u(x)}{x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^{n-1} \end{aligned}$$

Posons alors pour $x \in]0, R_u[$:

$$\lambda(x) = \ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n} x^n$$

Par construction, λ est de classe C^2 sur $]0, R_u[$ et :

$$\lambda'(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^{n-1} = \frac{1}{x J_0^2(x)}$$

Question 10 : la fonction $f = \lambda J_0$ est solution de (1) sur $]0, R_u[$, elle s'écrit :

$$f(x) = \lambda(x)J_0(x) = \ln(x)J_0(x) + \underbrace{J_0(x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n} x^n}_{=\eta(x)}$$

et la fonction η est bien la somme d'une série entière de rayon de convergence R_u (produit de Cauchy de deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_u et $R = +\infty$).

13. Comme η et J_0 sont continues en 0 et $J_0(0) = 1$, on a $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$. Ainsi f n'est pas bornée au voisinage de 0 donc la famille (J_0, f) est libre (question 5). L'ensemble des solutions de (1) sur $]0, R_\eta[$ est un espace vectoriel de dimension 2 (question 1), par conséquent la famille (J_0, f) est une base de l'ensemble des solutions de (1) sur $]0, R_\eta[$. L'ensemble des solutions de (1) sur $]0, R_\eta[$ est donc $\text{Vect}(J_0, f)$.

Problème II

1. On note $Y(\Omega) = \{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ avec les y_n deux à deux distincts. Comme Y est bornée, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in [a, b]$. Ainsi :

$$|y_n \mathbf{P}(Y = y_n)| = \underset{n \rightarrow +\infty}{O}(\mathbf{P}(Y = y_n))$$

La série $\sum \mathbf{P}(Y = y_n)$ converge (car $[Y = y_n], n \in \mathbb{N}$ est un système complet d'événements), comparaison séries à termes positifs $\sum y_n \mathbf{P}(Y = y_n)$ converge absolument donc Y admet une espérance.

2. **Énoncé.** Si Y est une v.a.d positive et d'espérance finie, alors :

$$\forall a > 0, \mathbf{P}(Y \geq a) \leq \frac{\mathbf{E}(Y)}{a}$$

Démonstration. Supposons que Y est une v.a.d dénombrable. On note :

$$Y(\Omega) = \{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

On a :

$$a\mathbf{P}(Y \geq a) = a \sum_{\substack{n \geq 0 \\ x_n \geq a}} \mathbf{P}(Y = y_n) \leq \sum_{\substack{n \geq 0 \\ x_n \geq a}} y_n \mathbf{P}(Y = y_n) \leq \mathbf{E}(Y)$$

3. On applique l'inégalité de Markov à $|X|$ qui est positive et admet une espérance (soit parce que $|X|$ est bornée, soit parce que quand X admet une espérance il en est de même de $|X|$).

4. Comme $t > 0$, $n > 0$ et $\varepsilon > 0$ et \exp est strictement croissante, on a :

$$S_n \geq \varepsilon \iff tnS_n \geq tn\varepsilon \iff e^{tnS_n} \geq e^{tn\varepsilon}$$

La variable aléatoire $nS_n = X_1 + \dots + X_n$ est à valeurs dans $[-n, n]$, elle est donc bornée de même que tnS_n et e^{tnS_n} . Ainsi e^{tnS_n} est positive, admet une espérance, on peut appliquer l'inégalité de Markov :

$$\mathbf{P}(S_n \geq \varepsilon) = \mathbf{P}(e^{tnS_n} \geq e^{tn\varepsilon}) \leq \frac{\mathbf{E}(e^{tnS_n})}{e^{tn\varepsilon}} = \frac{\mathbf{E}(e^{t(X_1 + \dots + X_n)})}{e^{nt\varepsilon}} = \frac{\mathbf{E}(e^{tX_1}) \dots \mathbf{E}(e^{tX_n})}{e^{nt\varepsilon}}$$

Comme X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes, il en est de même de $e^{tX_1}, \dots, e^{tX_n}$ et l'espérance du produit est le produit des espérances :

$$\mathbf{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{E}(e^{tX_1}) \dots \mathbf{E}(e^{tX_n})}{e^{nt\varepsilon}} = \frac{(\mathbf{E}(e^{tX}))^n}{e^{nt\varepsilon}}$$

car X_1, \dots, X_n suivent la même loi que X .

5. Par définition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_a(x) = \frac{1-x}{2} a^{-1} + \frac{1+x}{2} a - e^{x \ln a}$$

Par composition, g_a est dérivable sur \mathbb{R} et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'_a(x) = -\frac{a^{-1}}{2} + \frac{a}{2} - \ln(a) e^{x \ln(a)}$$

Comme $a > 1$ on a $\ln(a) > 0$ donc $x \mapsto x \ln(a)$ est croissante sur \mathbb{R} et ainsi $x \mapsto -\ln(a) e^{x \ln(a)}$ est décroissante sur \mathbb{R} . Ainsi g'_a est décroissante sur \mathbb{R} . On a :

$$g_a(-1) = a^{-1} - a^{-1} = 0 \quad \text{et} \quad g_a(1) = a - a = 0$$

Ainsi, la fonction g_a n'est pas strictement monotone sur $[-1, 1]$. La fonction g'_a est continue, elle s'annule donc nécessairement sur $[-1, 1]$ (théorème des valeurs intermédiaires, si elle ne s'annule pas, elle garde le même signe strict sur cet intervalle et g_a est strictement monotone). Il existe alors $\alpha \in [-1, 1]$ tel que $g'_a(\alpha) = 0$ et comme g'_a est décroissante on a $g'_a(x) \geq 0$ pour $x \leq \alpha$ et $g'_a(x) \leq 0$ pour $x \geq \alpha$. On en déduit que g_a est croissante sur $[-1, \alpha]$, décroissante sur $[\alpha, 1]$ donc $g_a(x) \geq 0$ pour $x \in [-1, 1]$.

6. Soit $t > 0$, soit $a = e^t$ alors $t = \ln(a)$ et $a > 1$; question précédente :

$$\forall x \in [-1, 1], e^{tx} = a^x \leq \frac{1-x}{2} a^{-1} + \frac{1+x}{2} a = \frac{1-x}{2} e^{-t} + \frac{1+x}{2} e^t$$

7. Soit $t > 0$. Soit $\omega \in \Omega$, on a alors $X(\omega) \in [-1, 1]$ donc d'après la question précédente :

$$e^{tX(\omega)} \leq \frac{1-X(\omega)}{2} e^{-t} + \frac{1+X(\omega)}{2} e^t$$

Comme X admet une espérance, il en est de même de $\frac{1-X}{2}$ et $\frac{1+X}{2}$. Croissance et linéarité de l'espérance :

$$\mathbf{E}(e^{tX}) \leq \mathbf{E}\left(\frac{1-X}{2} e^{-t} + \frac{1+X}{2} e^t\right) = e^{-t} \mathbf{E}\left(\frac{1-X}{2}\right) + e^t \mathbf{E}\left(\frac{1+X}{2}\right) = \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} e^t = \text{ch}(t)$$

car X centrée donc $\mathbf{E}\left(\frac{1-X}{2}\right) = \mathbf{E}\left(\frac{1+X}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

8. Pour $k = 0$, l'inégalité est une égalité. Pour $k \geq 1$, essentiellement :

$$(2k)! = 1 \cdots \underbrace{k(k+1)(k+2) \cdots (k+k)}_{k \text{ termes } \geq 2} \geq k! 2^k$$

Alors pour $t > 0$, avec une série exponentielle $\text{ch}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{t^2}{2}\right)^k = e^{t^2/2}$ d'où le résultat.

9. L'application

$$t \mapsto n \frac{t^2}{2} - nt\varepsilon = nt \left(\frac{t}{2} - \varepsilon \right)$$

est polynomiale du second degré, son coefficient dominant est strictement positif et elle s'annule en 0 et 2ε . Elle admet donc un minimum en ε . La fonction exponentielle étant strictement croissante, la fonction $t \mapsto e^{-nt\varepsilon + nt^2/2}$ admet un minimum en ε et ce minimum vaut $e^{-n\varepsilon^2/2}$.

10. Questions 4 et 8, pour tout $t > 0$:

$$\mathbf{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq \frac{(\mathbf{E}(e^{tX}))^n}{e^{tn\varepsilon}} \leq e^{nt^2/2 - nt\varepsilon}$$

Ceci est valable pour tout $t > 0$, on l'applique avec $t = \varepsilon > 0$:

$$\mathbf{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq e^{-n\varepsilon^2/2}$$

Ensuite :

$$\mathbf{P}(|S_n| \geq \varepsilon) = \mathbf{P}([S_n \geq \varepsilon] \cup [S_n \leq -\varepsilon]) \leq \mathbf{P}(S_n \geq \varepsilon) + \mathbf{P}(-S_n \geq \varepsilon)$$

Posons $Y_i = -X_i$, alors les Y_i sont mutuellement indépendantes, centrées et à valeurs dans $[-1, 1]$. On peut donc leur appliquer ce qui précède. Leur moyenne est $-S_n$ donc :

$$\mathbf{P}(-S_n \geq \varepsilon) \leq e^{-n\varepsilon^2/2}$$

d'où le résultat $\mathbf{P}(|S_n| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-n\varepsilon^2/2}$.

11.

$$\mathbf{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq \mathbf{P}(|S_n| \geq \varepsilon) \leq 2 \left(e^{-\varepsilon^2/2} \right)^n$$

et $e^{-\varepsilon^2/2} \in [0, 1[$. Série géométrique convergente puis comparaison séries à termes positifs.

12. Comme S_m est une variable aléatoire, $[|S_m| > \varepsilon]$ est un évènement, donc $B_n(\varepsilon)$ est un évènement car c'est une réunion dénombrable d'évènements. On a :

$$\begin{aligned} B_{n+1}(\varepsilon) &= \bigcup_{m \geq n+1} [|S_m| > \varepsilon] \\ B_n(\varepsilon) &= \bigcup_{m \geq n} [|S_m| > \varepsilon] = B_{n+1}(\varepsilon) \cup [|S_n| > \varepsilon] \end{aligned}$$

On a donc $B_{n+1}(\varepsilon) \subset B_n(\varepsilon)$. La suite d'évènements $(B_n(\varepsilon))_{n \geq 1}$ est donc décroissante. D'après le cours :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n \geq 1} B_n(\varepsilon)\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(B_n(\varepsilon))$$

or $0 \leq \mathbf{P}(B_n(\varepsilon)) \leq \sum_{m=n}^{+\infty} \mathbf{P}(|S_m| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ comme reste d'une série convergente.

13. Pour $n \geq 1$, on pose :

$$V_n(k) = \bigcap_{m \geq n} \left[|S_m| \leq \frac{1}{k} \right]$$

Alors $V_n(k)$ est un évènement comme intersection dénombrable d'évènements puis :

$$\Omega_k = \bigcup_{n \geq 1} V_n(k)$$

est un évènement comme réunion dénombrable d'évènements. Enfin :

$$\begin{aligned} \omega \in A &\iff S_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ &\iff \forall k \geq 1, \exists n \in \mathbb{N}, \forall m \geq n, |S_m(\omega)| \leq \frac{1}{k} \\ &\iff \forall k \geq 1, \omega \in \Omega_k \end{aligned}$$

On a donc $A = \bigcap_{k \geq 1} \Omega_k$; A est un évènement comme intersection dénombrable d'évènements.

14. On passe au complémentaire :

$$\overline{A} = \bigcup_{k \geq 1} \overline{\Omega_k}, \quad \overline{\Omega_k} = \bigcap_{n \geq 1} \overline{V_n(k)}, \quad \overline{V_n(k)} = \bigcup_{m \geq n} \left[|S_m| > \frac{1}{k} \right] = B_n \left(\frac{1}{k} \right)$$

On a ainsi $\mathbf{P}(\overline{\Omega_k}) = 0$ (question 12) puis :

$$0 \leq \mathbf{P}(\overline{A}) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(\overline{\Omega_k}) = 0$$

Donc $\mathbf{P}(\overline{A}) = 0$ puis $\mathbf{P}(A = 1)$. On peut aussi noter que la suite (Ω_k) est décroissante.