Notations et définitions.

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls.
- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.
- Si n_1 et n_2 sont deux entiers naturels, on note $[\![n_1, n_2]\!]$ l'ensemble des entiers naturels compris (au sens large) entre n_1 et n_2.
- Si X est une variable aléatoire admettant une espérance, on note $\mathbf{E}(X)$ cette espérance.

Problème I Une équation de Bessel

On s'intéresse dans ce problème à l'équation différentielle

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0. \tag{1}$$

Dans la partie 1, on détermine l'ensemble des solutions développables en série entière au voisinage de 0. *Dans la partie 2, on s'intéresse à l'existence d'un développement en série entière pour l'inverse d'une fonction elle-même développable en série entière. Dans la partie 3, on utilise ceci pour la recherche des solutions de l'équation.*

Partie 1 Série entière dont la somme est solution de (1)

1. Que déduit-on du théorème de Cauchy quant à la structure de l'ensemble des solutions de l'équation (1) sur $]0, +\infty[$?

2. Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière.

On suppose qu'il existe une série entière $\sum_{k\geqslant 0} c_k x^k$ *avec* $c_0 = 1$, *de rayon de convergence* R *non nul et dont la fonction somme* J_0 *est solution de* (1) *sur* $]-R, R[$.

3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{cases} c_{2k+1} = 0 \\ c_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{4^k (k!)^2} \end{cases}$$

4. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{k\geqslant 0} c_k x^k$.

5. Soient $r > 0$ et f une autre solution de (1) sur $]0, r[$. Montrer que si (J_0, f) est liée dans l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 sur $]0, r[$, alors f est bornée au voisinage de 0.

Partie 2 Inverse d'une série entière non nulle en 0

Soit $\sum_{k\geqslant 0} \alpha_k x^k$ *une série entière de rayon de convergence* $R_\alpha > 0$ *telle que* $\alpha_0 = 1$. *L'objectif de ce paragraphe est de montrer l'existence et l'unicité d'une série entière* $\sum_{k\geqslant 0} \beta_k x^k$ *de rayon de convergence* $R_\beta > 0$ *telle que pour tout x appartenant aux domaines de convergence des deux séries :*

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k\right) = 1.$$

6. Montrer que si $\sum_{k\geqslant 0} \beta_k x^k$ est solution , alors la suite $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ satisfait aux relations suivantes :

$$\begin{cases} \beta_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Soit r un réel tel que $0 < r < R_\alpha$.

7. Montrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$|\alpha_k| \leqslant \frac{M}{r^k}.$$

8. Montrer que (2) admet une unique solution $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\left|\beta_k\right| \leqslant \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}.$$

On pourra raisonner par récurrence.

9. Que peut-on dire du rayon de convergence $R_\beta > 0$ de la série entière $\sum_{k\geqslant 0} \beta_k x^k$?

Partie 3 Ensemble des solutions de (1)

10. Soit $r > 0$ tel que J_0 ne s'annule pas sur l'intervalle $]0, r[$. Soit λ une fonction de classe C^2 sur $]0, r[$. Montrer que la fonction $y : x \mapsto \lambda(x) J_0(x)$ est solution de (1) sur $]0, r[$ si, et seulement si, la fonction $x :\mapsto x J_0^2(x)\lambda'(x)$ est de dérivée nulle sur $]0, r[$.

11. Montrer que J_0^2 est somme d'une série entière dont on donnera le rayon de convergence. Que vaut $J_0^2(0)$?

12. En déduire l'existence d'une fonction η somme d'une série entière de rayon de convergence $R_\eta > 0$ telle que :

$$x \mapsto \eta(x) + J_0(x)\ln(x)$$

soit solution de (1) sur un intervalle $]0, R_\eta[$.

13. En déduire l'ensemble des solutions de (1) sur $]0, R_\eta[$.

Problème II

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ *un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire discrète sur* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ *à valeurs dans* $[-1, 1]$. *On considère dans ce problème une suite* $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ *de variables aléatoires* discrètes *sur* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, mutuellement indépendantes et de même loi que X. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note*

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

Le but de ce problème est d'établir que si la variable aléatoire X est centrée ($\mathbf{E}(X) = 0$) *alors la suite* $(S_n)_{n\geqslant 1}$ *converge presque sûrement vers la constante* 0. *Il s'agit d'un cas particulier de la loi forte des grands nombres.*
Une variable aléatoire discrète Y sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ *est dite* bornée *lorsqu'il existe des réels a et b tels que $a < b$ et $Y(\Omega) \subset [a, b]$.*

1. Démontrer que toute variable aléatoire discrète bornée Y admet une espérance.

La variable aléatoire discrète X étant par définition bornée, elle admet une espérance. Dans toute la suite du problème, on suppose que X est centrée, c'est à dire que $\mathbf{E}(X) = 0$.

2. Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire discrète Y sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ (une démonstration ne traitant que le cas des variables aléatoires finies sera cependant valorisée).

3. En déduire que, pour tout $\alpha > 0$:

$$\mathbf{P}(|X| \geqslant \alpha) \leqslant \frac{\mathbf{E}(|X|)}{\alpha}.$$

4. Montrer que, pour tout $t > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbf{P}(S_n \geqslant \varepsilon) = \mathbf{P}\left(\mathrm{e}^{tnS_n} \geqslant \mathrm{e}^{tn\varepsilon}\right) \leqslant \frac{\left(\mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)\right)^n}{\mathrm{e}^{tn\varepsilon}}.$$

Majoration de $\mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)$.

5. Soit $a > 1$. On considère la fonction g_a définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_a(x) = \frac{1-x}{2}a^{-1} + \frac{1+x}{2}a - a^x.$$

Montrer que la fonction g_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que la fonction g_a' est décroissante sur $\mathbb{R}$. En déduire, en remarquant que $g_a(-1) = g_a(1) = 0$, que, pour tout $x \in [-1, 1]$, $g_a(x) \geqslant 0$.

6. En déduire que

$$\forall t > 0,\ \forall x \in [-1, 1],\ \mathrm{e}^{tx} \leqslant \frac{1-x}{2}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1+x}{2}\mathrm{e}^{t}.$$

7. En déduire que

$$\forall t > 0,\ \mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right) \leqslant \operatorname{ch} t.$$

8. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k.$$

En déduire que

$$\forall t > 0,\ \mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right) \leqslant \mathrm{e}^{t^2/2}.$$

Majoration de $\mathbf{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon)$.

Dans ce paragraphe, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $\varepsilon > 0$.

9. Montrer que la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^{-nt\varepsilon + nt^2/2}$ atteint un minimum en un point que l'on précisera.

10. En déduire que $\mathbf{P}(S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant e^{-n\varepsilon^2/2}$, puis que

$$\mathbf{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2\mathrm{e}^{-n\varepsilon^2/2}.$$

Conclusion.

11. Montrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, la série de terme général $\mathbf{P}(|S_n| > \varepsilon)$ converge.

12. On fixe un réel $\varepsilon > 0$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$B_n(\varepsilon) = \bigcup_{m \geqslant n} \{\omega \in \Omega\,;\ |S_m(\omega)| > \varepsilon\}.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\varepsilon > 0$, $B_n(\varepsilon)$ est un événement et que $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n(\varepsilon)\right) = 0$.

13. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, posons

$$\Omega_k = \left\{\omega \in \Omega\,;\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \forall m \geqslant n,\ |S_m(\omega)| \leqslant \frac{1}{k}\right\}.$$

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Ω_k est un événement. Écrire l'ensemble

$$A = \left\{\omega \in \Omega\,;\ \lim_{n\to\infty} S_n(\omega) = 0\right\}$$

à l'aide des événements Ω_k, $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire que A est un événement.

14. Déduire des questions précédentes que $\mathbf{P}(A) = 1$.