

## Correction

**Extrait du rapport. Analyse globale des résultats.** L'algèbre linéaire élémentaire (noyaux, images, valeurs propres, théorème du rang) est sollicitée. Cette partie du programme d'algèbre est généralement la mieux maîtrisée. Les espaces considérés sont ici des espaces de polynômes mais cela n'a joué un rôle qu'à travers la présence des coefficients binomiaux  $\binom{n}{m}$ ,  $0 \leq m \leq n$  qui jouent un rôle central. De nombreuses questions sont très simples et demandent seulement l'application judicieuse des résultats du cours. Il fallait cependant faire preuve de soin dans l'expression des formules, en particulier au niveau de l'indexation. Une seule vraie lacune semble apparaître et concerne les problèmes de dénombrements (partie II).

La simplicité des questions a pu surprendre certains candidats qui sont habitués à des sujets de concours ne pouvant être traités dans le temps imparti et qui ont choisi de se concentrer sur la partie I. De nombreux candidats, qui paraissent capables au vu de ce qu'ils ont fait dans la partie I, auraient vraiment gagné à travailler aussi sur d'autres parties, la III en particulier.

**I.A.1)** Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  non nul noté :

$$P = \sum_{k=0}^d a_k X^k, \quad d = \deg P, \quad a_0, \dots, a_d \in \mathbb{R}, \quad a_d = \text{cd}(P) \neq 0$$

Binôme de Newton :

$$\begin{aligned} \tau(P) = P(X+1) &= \sum_{k=0}^d a_k (X+1)^k = a_d \left( \sum_{j=0}^d \binom{d}{j} X^j \right) + \sum_{k=0}^{d-1} a_k (X+1)^k \\ &= a_d X^d + a_d \underbrace{\sum_{j=0}^{d-1} \binom{d}{j} X^j + \sum_{k=0}^{d-1} a_k (X+1)^k}_{=Q(X)} \end{aligned}$$

On a  $Q \in \mathbb{R}_{d-1}[X]$  et  $a_d \neq 0$  donc :

$$\deg(\tau(P)) = d = \deg P \quad \text{et} \quad \text{cd}(\tau(P)) = a_d = \text{cd } P \quad (\text{pour } P \in \mathbb{R}_n[X], P \neq 0)$$

**I.A.2)** Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ . Par une récurrence immédiate, on a :  $\forall k \in \mathbb{N}, \tau^k(P) = P(X+k)$ .

**I.A.3)** Essentiellement :

$$M = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & X & X^2 & X^3 & X^4 & \dots & X^n \\ & 1 & X+1 & (X+1)^2 & (X+1)^3 & (X+1)^4 & \dots & (X+1)^n \\ \hline (0) & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & & 1 & 2 & 3 & 4 & & \binom{n}{1} \\ & & & 1 & 3 & 6 & & \binom{n}{2} \\ & & & & 1 & 4 & & \vdots \\ & & & & & 1 & & \binom{n}{n-2} \\ & & & & & & \ddots & \binom{n}{n-1} \\ & & & & & & & 1 \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^{n-2} \\ X^{n-1} \\ X^n \end{array}$$

Plus formellement, pour  $j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ , binôme de Newton :

$$\tau(P_j) = (X+1)^{j-1} = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} X^i = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} P_{i+1} = \sum_{i=1}^j \binom{j-1}{i-1} P_i$$

donc  $M_{ij} = \binom{j-1}{i-1}$  pour  $i \in \llbracket 1, j \rrbracket$ ,  $M_{ij} = 0$  pour  $i \in \llbracket j+1, n+1 \rrbracket$ .

**I.A.4)** Matrice  $M$  est triangulaire supérieure donc  $\chi_\tau(X) = \chi_M(X) = (X-1)^{n+1}$  et  $\text{Sp } \tau = \{1\}$ .

**Méthode 1** pour  $\tau$  non diagonalisable : en utilisant  $\dim E_1(M)$ . On a :

$$M - I_{n+1} = \begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & & 0 & 2 & 3 & 4 & & \binom{n}{1} \\ & & & 0 & 3 & 6 & & \binom{n}{2} \\ & & & & 0 & 4 & & \vdots \\ & & & & & 0 & & \binom{n}{n-2} \\ & & & & & & \ddots & \binom{n}{n-1} \\ & & & & & & & 0 \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Donc  $M - I_{n+1} \neq 0$ . Ainsi  $\text{rg}(M - I_{n+1}) \geq 1$  donc par le théorème du rang :

$$\dim E_1(M) = \dim \text{Ker}(M - I_{n+1}) = n+1 - \text{rg}(M - I_{n+1}) < n+1$$

Comme 1 est racine de  $\chi_M$  de multiplicité  $n+1$  et  $\dim E_1(M) < n+1$ ,  $M$  n'est pas diagonalisable.

**Méthode 2 :** avec un raisonnement par l'absurde. On suppose  $M$  diagonalisable, comme on a  $\text{Sp}(M) = \{1\}$ , la matrice  $M$  est semblable à  $I_{n+1}$  donc  $M = I_{n+1}$  d'où une contradiction. Par conséquent,  $M$  n'est pas diagonalisable.

**Conclusion :**  $\tau$  n'est pas diagonalisable.

**I.A.5)** Matrice  $M$  est triangulaire supérieure, donc  $\det \tau = \det M = 1$  donc  $\det \tau \neq 0$  et  $\tau$  est bijective. On considère l'endomorphisme :

$$\begin{array}{ccc} \tau' : \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P(X-1) \end{array}$$

On a alors pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  :

$$\tau'(\tau(P)) = \tau'(P(X+1)) = P((X-1)+1) = P$$

$$\tau(\tau'(P)) = \tau(P(X-1)) = P((X+1)-1) = P$$

donc  $\tau' \circ \tau = \tau \circ \tau' = \text{id}$  et ainsi  $\tau'$  est l'inverse de  $\tau$ . On aura alors pour  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\tau^{-k}(P) = (\tau^{-1})^k(P) = \tau'^k(P) = P(X-k)$$

ce qui montre que la relation obtenue à la question I.A.2 reste valable pour  $j \in \mathbb{Z}$ .

**I.A.6)** On sait que  $M^{-1}$  est la matrice de  $\tau^{-1}$  dans la base  $(P_1, \dots, P_{n+1})$ . Essentiellement :

$$M^{-1} = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & X & X^2 & X^3 & X^4 & \dots & X^n \\ & 1 & X-1 & (X-1)^2 & (X-1)^3 & (X-1)^4 & \dots & (X-1)^n \\ \hline (0) & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \dots & (-1)^n \\ & & 1 & -2 & 3 & -4 & & (-1)^{n-1} \binom{n}{1} \\ & & & 1 & -3 & 6 & & (-1)^{n-2} \binom{n}{2} \\ & & & & 1 & -4 & & \vdots \\ & & & & & 1 & & \binom{n}{n-2} \\ & & & & & & \ddots & -\binom{n}{n-1} \\ & & & & & & & 1 \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^{n-2} \\ X^{n-1} \\ X^n \end{array}$$

Plus formellement, pour  $j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ , binôme de Newton :

$$\tau^{-1}(P_j) = (X-1)^{j-1} = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} X^i (-1)^{j-1-i} = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} P_{i+1} (-1)^{j-1-i} = \sum_{i=1}^j \binom{j-1}{i-1} (-1)^{j-i} P_i$$

donc  $M_{ij}^{-1} = (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1}$  pour  $i \in \llbracket 1, j \rrbracket$ ,  $M_{ij}^{-1} = 0$  pour  $i \in \llbracket j+1, n+1 \rrbracket$ .

**I.A.7) Méthode 1 :** en écrivant sous forme développée.

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_k \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_0+u_1 \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} u_j \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} u_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & \vdots & \ddots & & \\ \binom{k}{0} & & & \binom{k}{k} & \\ \vdots & & & & \ddots \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \dots & \binom{n}{n-2} & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n} \end{pmatrix}^{(0)} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_k \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_k \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

en posant  $Q = M^\top$ .

**Méthode 2 :** en explicitant les calculs. Pour avoir des notations cohérentes, on pose  $V_k = v_{k-1}$  et  $U_k = u_{k-1}$ . On cherche alors une matrice  $Q \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  telle que :

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_{n+1} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_{n+1} \end{pmatrix}$$

et ainsi tous les indices doivent aller de 1 à  $n+1$ . Par définition de la suite  $(v_k)$  et de la matrice  $M$ , on a :

$$\forall k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, V_k = v_{k-1} = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} u_j = \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} U_i = \sum_{i=1}^k M_{ik} U_i = \sum_{i=1}^{n+1} M_{ik} U_i$$

Par définition du produit matriciel, ceci signifie que :

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_{n+1} \end{pmatrix} = M^\top \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = M^\top \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

**I.A.8) Méthode 1.** On a  $\begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = M^\top \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ , or  $\det(M^\top) = \det(M) \neq 0$  donc  $M^\top$  est inversible donc :

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = (M^\top)^{-1} \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

On veut utiliser la matrice  $M^{-1}$  pour poursuivre le calcul. Autrement dit, on souhaite écrire  $(M^{-1})^\top$  à la place de  $(M^\top)^{-1}$ . On peut considérer que ceci demande une justification. Par définition :

$$MM^{-1} = I_{n+1}$$

donc avec les propriétés de la transposition :

$$(M^{-1})^\top M^\top = I_{n+1}^\top = I_{n+1}$$

Ceci montre que  $(M^\top)^{-1} = (M^{-1})^\top$ . Cette matrice sera dans la suite notée  $M^{-1\top}$  ou  $M^{\top-1}$ . On a donc :

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = M^{-1\top} \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

et on obtient la relation demandée dans l'énoncé en effectuant le produit (il faut le faire).

**Méthode 2,** peut être plus simple à justifier. On *transpose* la relation obtenue dans la question précédente. La transposée d'une colonne donne une ligne et  $Q^\top = M$  :

$$(v_0 \cdots v_n) = (u_0 \cdots u_n) M$$

On multiplie à droite par  $M^{-1}$  :

$$(v_0 \cdots v_n) M^{-1} = (u_0 \cdots u_n)$$

Sous forme développée :

$$(v_0 \cdots v_n) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^n \\ & 1 & -2 & 3 & -4 & & (-1)^{n-1} \binom{n}{1} \\ & & 1 & -3 & 6 & & (-1)^{n-2} \binom{n}{2} \\ & & & 1 & -4 & & \vdots \\ & & & & 1 & & \binom{n}{n-2} \\ & & & & & \ddots & -\binom{n}{n-1} \\ (0) & & & & & & 1 \end{pmatrix} = (u_0 \cdots u_n)$$

Par définition du produit matriciel,  $u_n$  s'obtient en faisant le produit scalaire de la ligne  $(v_0 \cdots v_n)$  par la dernière colonne de  $M^{-1}$  ce qui donne :

$$u_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^{n-i} u_i$$

et comme ceci est vrai pour tout  $n$ , on a bien la relation demandée.

**I.A.9)** Avec la formule du binôme de Newton, on a pour  $k \in \mathbb{N}$  :

$$v_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \lambda^j = (1 + \lambda)^k$$

On a donc  $(v_k = (1 + \lambda)^k)_{k \in \mathbb{N}}$  puis :

$$\sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (1 + \lambda)^j (-1)^{k-j} = ((1 + \lambda) - 1)^k = \lambda^k = u_k$$

et la formule I.2 est bien vérifiée.

**I.B.1)** Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  non constant noté :

$$P = \sum_{k=0}^d a_k X^k, \quad d = \deg P \geq 1, \quad a_0, \dots, a_d \in \mathbb{R}, \quad a_d \neq 0$$

Avec le binôme de Newton :

$$\begin{aligned} \delta(P) &= \sum_{k=0}^d a_k ((X+1)^k - X^k) = \sum_{k=1}^d a_k ((X+1)^k - X^k) = \sum_{k=1}^d a_k \underbrace{\left( \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} X^j \right)}_{=Q_k(X), \deg Q_k = k-1} \\ &= \underbrace{a_d}_{\neq 0} Q_d + \underbrace{a_{d-1} Q_{d-1} + \dots + a_1 Q_1}_{\text{degré} < d-1} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\deg(\delta(P)) = d - 1 = \deg(P) - 1$$

$$\text{cd}(\delta(P)) = a_d \text{cd}(Q_d) = d a_d = \deg(P) \text{cd}(P) \quad \text{car} \quad \text{cd}(Q_d) = \binom{d}{d-1} = d$$

**Remarque.** Dans la suite, pour éviter de distinguer les cas  $P$  constant et  $P$  non constant, on utilisera souvent la relation  $\deg \delta(P) \leq \deg(P) - 1$ . En effet, si  $P$  n'est pas constant ceci est vrai car on a égalité et si  $P$  est constant on a  $\deg \delta(P) = -\infty$  donc cette inégalité est vraie également (même si  $P = 0$  car on considère que  $-\infty - 1 = -\infty$ ).

**I.B.2)** D'après la question précédente, quel que soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , on a  $\delta(P) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$  et ceci montre que  $\text{Im}(\delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ . De plus, toujours d'après la question précédente, si  $P \notin \mathbb{R}_0[X]$ , alors  $\delta(P) \neq 0$  et ceci montre que  $\text{Ker}(\delta) \subset \mathbb{R}_0[X]$ . On va établir que ces inclusions sont des égalités.

- Soit  $P \in \mathbb{R}_0[X]$ , alors on a  $\delta(P) = P(X+1) - P(X) = 0$  car  $P$  est constant. Ainsi  $P \in \text{Ker}(\delta)$  et on a donc  $\mathbb{R}_0[X] \subset \text{Ker}(\delta)$  d'où  $\text{Ker}(\delta) = \mathbb{R}_0[X]$ .
- Avec le théorème du rang :

$$\dim \text{Im}(\delta) = \text{rg} \delta = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \text{Ker} \delta = n + 1 - 1 = n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

et par égalité des dimensions, on a alors  $\text{Im} \delta = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ .

**I.B.3)** Pour  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on considère l'hypothèse de récurrence :

$$\mathcal{H}(j) : \text{Ker}(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X], \text{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X]$$

D'après la question précédente,  $\mathcal{H}(1)$  est vraie. Soit  $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  et supposons  $\mathcal{H}(j)$  vraie.

Pour  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , on a :

$$\begin{aligned} P \in \text{Ker}(\delta^{j+1}) &\iff \delta^{j+1}(P) = 0 \iff \delta^j(\delta(P)) = 0 \iff \delta(P) \in \text{Ker}(\delta^j) \iff \delta(P) \in \mathbb{R}_{j-1}[X] \\ &\iff P \in \mathbb{R}_j[X] \quad \text{avec la question précédente} \end{aligned}$$

Ceci montre que  $\text{Ker}(\delta^{j+1}) = \mathbb{R}_j[X]$ . Pour  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , on a :

$$\deg(\delta^{j+1}(P)) \leq \deg P - (j+1) \leq n - (j+1)$$

donc  $\delta^{j+1}(P) \in \mathbb{R}_{n-(j+1)}[X]$  et on a donc  $\text{Im}(\delta^{j+1}) \subset \mathbb{R}_{n-(j+1)}[X]$ . On utilise ensuite le théorème du rang :

$$\dim \text{Im}(\delta^{j+1}) = \text{rg}(\delta^{j+1}) = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \text{Ker}(\delta^{j+1}) = (n+1) - (j+1) = n-j = \dim \mathbb{R}_{n-j-1}[X]$$

Par égalité des dimensions,  $\text{Im}(\delta^{j+1}) = \mathbb{R}_{n-j-1}[X]$ . Par conséquent,  $\mathcal{H}(j+1)$  est vraie. Par récurrence, on a :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{Ker}(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X], \text{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X]$$

**I.B.4)** Soit  $k \in \mathbb{N}$ . On a  $\delta = \tau - \text{id}$  et  $\tau$  et  $\text{id}$  commutent donc avec le binôme de Newton :

$$\delta^k = (\tau - \text{id})^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \tau^j (-\text{id})^{k-j} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \tau^j$$

ce qui donne appliqué à un polynôme  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  :

$$\delta^k(P) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \tau^j(P)$$

**Remarque :** appliquer la formule du binôme de Newton à des endomorphismes qui commutent n'est pas vraiment au programme. Cependant, la formule est au programme pour des matrices (qui commutent) et on peut considérer que son application aux endomorphismes s'en déduit.

**I.B.5)** Considérons  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ . D'après I.B.3, on a  $P \in \text{Ker} \delta^n$  donc  $\delta^n(P) = 0$ . En utilisant le résultat de la question précédente on obtient :

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} \tau^j(P) = 0$$

On rappelle que pour  $j \in \mathbb{N}$ ,  $\tau^j(P) = P(X+j)$ , on a ainsi :

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} P(X+j) = 0$$

puis en substituant 0 à  $X$  :

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} P(j) = 0$$

**I.B.6)a)** Sachant que  $u^2 = \delta$ , on a :

$$u \circ \delta = u \circ u^2 \circ u^2 = u^5 = u^2 \circ u^2 \circ u = \delta^2 \circ u$$

donc  $u$  et  $\delta^2$  commutent.

**I.B.6)b)** Comme  $u$  et  $\delta^2$  commutent, le noyau de  $\delta^2$  est stable par  $u$ . Or  $\text{Ker } \delta^2 = \mathbb{R}_1[X]$  (question I.B.3) donc  $\mathbb{R}_1[X]$  est stable par  $u$ .

**I.B.6)c)** Supposons qu'il existe  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . On veut obtenir une contradiction. On note  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , on a alors  $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix}$  d'où le système :

$$\begin{cases} a^2 + bc = 0 \\ b(a+d) = 1 \\ c(a+d) = 0 \\ bc + d^2 = 0 \end{cases}$$

En particulier,  $b(a+d) = 1$  donc  $a+d \neq 0$  et  $c(a+d) = 0$  donc  $c = 0$ . On en déduit que  $a^2 = d^2 = 0$  donc  $a = d = 0$  ce qui donne une contradiction avec  $b(a+d) = 1$ . Il n'existe donc pas de matrice  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

**I.B.6)d)** Le sous-espace vectoriel  $F = \mathbb{R}_1[X]$  est stable par  $u$  mais également par  $\delta$  (car pour  $P \in \mathbb{R}_1[X]$ , on a  $\deg \delta(P) \leq \deg(P) - 1 \leq 0$  donc  $\delta(P) \in \mathbb{R}_0[X] \subset \mathbb{R}_1[X]$ ). On note  $\mathcal{B} = (1, X)$  la base canonique de  $F$ ,  $A$  la matrice dans  $\mathcal{B}$  de l'endomorphisme de  $F$  induit par  $u$  et  $J$  la matrice dans  $\mathcal{B}$  de l'endomorphisme induit par  $\delta$ . Comme  $\delta(1) = 0$  et  $\delta(X) = 1$ , on a  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Comme  $\delta = u^2$ , on a  $J = A^2$  et d'après la question précédente, ceci est impossible. Par conséquent, il n'existe pas d'endomorphisme  $u$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  tel que  $u^2 = \delta$ .

**I.B.7)a)** Comme  $\deg P = d$ , on a :

$$\begin{aligned} \deg P &= d \\ \deg \delta(P) &= d-1 \\ &\vdots \\ \deg \delta^d(P) &= 0 \end{aligned}$$

La famille  $(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P))$  est une famille de polynômes non nuls échelonnée en degrés. Par conséquent, cette famille est libre. C'est une famille libre de  $d+1$  éléments appartenant tous à  $\mathbb{R}_d[X]$  et  $\dim \mathbb{R}_d[X] = d+1$ , c'est donc une base de  $\mathbb{R}_d[X]$  en on a en particulier :

$$\text{Vect}(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P)) = \mathbb{R}_d[X]$$

**I.B.7)b)** Considérons  $V$  sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}_n[X]$ , stable par  $\delta$  et non réduit à  $\{0\}$ . L'ensemble :

$$D = \{\deg P \mid P \in V, P \neq 0\}$$

est une partie de  $\mathbb{N}$ , non vide et majorée (par  $n$ ). Elle admet donc un plus grand élément  $d = \max D \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et il existe un polynôme  $P \in V$  tel que  $\deg P = d$ . Par définition de  $d$ , pour tout polynôme  $Q \in V$  on a  $\deg Q \leq d$  ce qui signifie que  $V \subset \mathbb{R}_d[X]$ . Comme  $V$  est stable par  $\delta$ , on a  $\delta^k(P) \in V$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et en particulier  $V$  contient les polynômes  $P, \delta(P), \dots, \delta^d(P)$ . Comme  $V$  est stable par combinaison linéaire, on a :

$$\text{Vect}(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P)) \subset V$$

donc d'après la question précédente  $\mathbb{R}_d[X] \subset V$ . Par double inclusion, on a  $V = \mathbb{R}_d[X]$ .

### Extrait du rapport Partie I.

- I.A.2) Dès cette question facile, beaucoup d'expressions maladroites, telles que  $\tau^k(P(X+1))$ .
- I.A.3) Beaucoup d'erreurs d'indexation à au moins un des deux indices. L'énoncé était clair sur le champ des indices de même que sur le fait que le coefficient binomial  $\binom{n}{m}$  n'est *a priori* défini que pour  $0 \leq m \leq n$ . Il convenait donc de préciser que la matrice  $M$  est nulle en dessous de la diagonale.
- I.A.4) Quelques imprécisions habituelles sur le nombre de valeurs propres entendu avec multiplicités. Une bonne proportion de candidats applique avec succès le critère classique de diagonalisabilité d'après la dimension des espaces propres.
- I.A.5) Beaucoup de candidats prouvent longuement l'injectivité de  $\tau$ . D'autres vont un peu trop vite en besogne et appellent  $\tau^{-1}$  leur proposition d'inverse pour  $\tau$ .
- I.A.6) On relève ici les mêmes erreurs qu'en I.A.3.
- I.A.7) Même remarque qu'en I.A.3. De plus la confusion entre  $Q$  et  $M$  a été fréquente – encore une question d'indices.
- I.A.8) L'essentiel était ici de remarquer que  $M = Q^\top$ , ce qui avait pu être noté à la question précédente.
- I.A.9) Question facile généralement bien traitée.
- I.B.1) Beaucoup d'erreurs dans le calcul du coefficient dominant, qui donne lieu à des formules souvent bien compliquées.
- I.B.2) Il est ici classique de calculer d'abord le noyau puis d'appliquer le théorème du rang pour obtenir l'image à partir de l'inclusion évidente. Le théorème du rang est appliqué à bon escient par de très nombreux candidats. Notons toutefois, comme certains candidats l'ont fait, que l'image n'est pas difficile à déterminer au vu de la matrice  $M - I_{n+1}$ .
- I.B.3) Il était plus naturel de déterminer l'image comme conséquence du cas  $k = 1$  et d'appliquer ensuite le théorème du rang pour obtenir le noyau. On a vu des démonstrations souvent inutilement longues.
- I.B.4) Ici aussi beaucoup de candidats s'égarent dans des calculs très longs.
- I.B.5) La confusion très fréquente entre les différents niveaux variable/fonction/opérateur a vraiment entraîné des erreurs. Ainsi de l'écriture erronée  $\delta^n(P(0))$  qui a parfois trompé le candidat lui-même. À l'inverse une bonne proportion de candidats a compris que tout se résumait à l'évaluation en 0 d'une égalité entrevue précédemment.



I.B.6b) Question souvent bien comprise.

I.B.6c) La plupart des candidats, même faibles par ailleurs, fait avec un certain succès une discussion de cas à partir des coefficients éventuels de  $A$ . Certains notent d'emblée la simplification entraînée par le fait que  $A$  et son carré commutent. D'autres enfin raisonnent sur l'ordre de nilpotence de  $A$ .

I.B.6d) On ne trouve que rarement une transcription matricielle correcte du fait que  $\mathbb{R}_1[X]$  est stable par  $u$  (et  $\delta$ ).

I.B.7a) La notion de famille de polynômes échelonnée en degrés est bien connue.

I.B.7b) Cette question a posé de gros problèmes aux candidats. La situation est celle d'une somme de sous-espaces pris dans une famille ordonnée pour l'inclusion (les  $\mathbb{R}_d[X]$ ,  $d \in [0, n]$ ). En pratique, quelques rares candidats ont pensé à prendre un polynôme de plus grand degré dans le sous-espace, ce degré n'étant pas, à priori, la dimension du sous-espace, contrairement ce qu'affirment certaines copies.

**II.A.1)** Supposons  $p < n$ . Pour une application  $f : [1, p] \rightarrow [1, n]$ , on a :

$$f([1, p]) = \{f(k) \mid k \in [1, p]\} = \{f(1), f(2), \dots, f(p)\}$$

En particulier,  $\text{card } f([1, p]) \leq p < n$  donc  $f$  n'est pas surjective. Pour  $p < n$ , il n'existe pas de surjection de  $[1, p]$  dans  $[1, n]$  et ainsi  $S(p, n) = 0$ .

**II.A.2)** Rappelons que pour une application entre deux ensembles finis de même cardinal, l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité sont équivalentes. Ainsi, une surjection de  $[1, n]$  dans lui-même est une bijection. Pour définir une surjection  $f : [1, n] \rightarrow [1, n]$ , il faut donc déterminer les valeurs de  $f(1), f(2), \dots, f(n)$  de sorte que ces valeurs soient deux à deux distinctes. Il y a donc  $n$  possibilités pour choisir  $f(1)$ ,  $n-1$  possibilités pour choisir  $f(2)$ , etc. 2 possibilités pour choisir  $f(n-2)$  et une seule pour  $f(n)$ . On en déduit que  $S(n, n) = n!$ .

**II.A.3)** Considérons une application  $f : [1, n+1] \rightarrow [1, n]$ . Comme le cardinal de l'ensemble de départ est strictement supérieur à celui de l'ensemble d'arrivée, elle ne peut pas être injective. Il existe alors  $i, j \in [1, n+1]$  tels que  $i < j$  et  $f(i) = f(j)$ . Considérons maintenant l'application :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{f} : [1, n+1] \setminus \{i\} & \rightarrow & [1, n] \\ k & \mapsto & f(k) \end{array}$$

L'image de  $\tilde{f}$  est la même que celle de  $f$ . Par conséquent,  $f$  est surjective si, et seulement si,  $\tilde{f}$  est surjective si, et seulement si,  $\tilde{f}$  est injective (car les ensembles de départ et d'arrivée de  $\tilde{f}$  ont même cardinal). Par conséquent, une application  $f : [1, n+1] \rightarrow [1, n]$  est surjective si, et seulement si, il existe deux éléments dans l'ensemble de départ, et deux seulement, admettant la même image par  $f$ . Pour définir une surjection  $f : [1, n+1] \rightarrow [1, n]$ , il faut :

- Choisir deux éléments  $i$  et  $j$  dans  $[1, n+1]$  avec  $i < j$ , un élément  $a \in [1, n]$  et poser  $f(i) = f(j) = a$ ;
- Choisir des images deux à deux distinctes dans  $[1, n] \setminus \{a\}$  pour les éléments  $k \in [1, n+1] \setminus \{i, j\}$ .

Il y a  $(n+1)^2$  couples d'éléments  $(i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2$ , parmi ces couples il y en a  $(n+1)n$  tels que  $i \neq j$  et  $n(n+1)/2$  pour lesquels  $i < j$ . Il y a donc  $n^2(n+1)/2$  manières de choisir  $(i, j, a)$ . Ce choix étant fait, il y a  $(n-1)!$  manières de choisir les images des  $n-1$  éléments restants dans  $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ . Finalement :

$$S(n+1, n) = \frac{n^2(n+1)}{2}(n-1)! = \frac{n(n+1)!}{2}$$

**II.B.1)** Le nombre d'applications de  $\llbracket 1, p \rrbracket$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$  est  $n^p$  (il y a  $n$  manières de choisir  $f(1)$ ,  $n$  manières de choisir  $f(2)$ , etc.  $n$  manières de choisir  $f(p)$ ).

**II.B.2)** Pour des ensembles  $E$  et  $F$  finis, on notera :

- $\mathcal{F}(E, F)$  l'ensemble des applications  $f : E \rightarrow F$ ;
- $\mathcal{S}(E, F)$  l'ensemble des applications  $f : E \rightarrow F$  qui sont surjectives.

On rappelle que  $\mathcal{P}(F)$  désigne l'ensemble des parties de  $F$ . Pour  $G \in \mathcal{P}(F)$ , on note :

- $\mathcal{F}_G(E, F)$  l'ensemble des applications  $f : E \rightarrow F$  telles que  $f(E) = G$ .

On considère pour la suite  $E = \llbracket 1, p \rrbracket$  et  $F = \llbracket 1, n \rrbracket$ . On a alors :

$$\mathcal{F}(\llbracket 1, p \rrbracket, \llbracket 1, n \rrbracket) = \bigcup_{G \in \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)} \mathcal{F}_G(\llbracket 1, p \rrbracket, \llbracket 1, n \rrbracket)$$

cette égalité signifiant que pour toute fonction  $f : E \rightarrow F$ , il existe  $G \subset F$  telle que  $f(E) = G$  (ce qui est évident car il suffit de choisir  $G = f(E)$ ). Cette réunion est disjointe car si  $G$  et  $G'$  sont deux parties de  $F$  telles que  $G \neq G'$ , on ne peut pas avoir à la fois  $f(E) = G$  et  $f(E) = G'$ . On a ainsi :

$$n^p = \text{card } \mathcal{F}(\llbracket 1, p \rrbracket, \llbracket 1, n \rrbracket) = \sum_{G \in \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)} \text{card } \mathcal{F}_G(\llbracket 1, p \rrbracket, \llbracket 1, n \rrbracket)$$

Une application  $f$  appartenant à  $\mathcal{F}_G(E, F)$  est une surjection de  $E$  sur  $G$ . Ainsi :

$$n^p = \sum_{G \in \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)} \text{card } \mathcal{S}(\llbracket 1, p \rrbracket, G)$$

Considérons  $G \subset F$  et posons  $m = \text{card } G$ . On peut alors définir une bijection  $\varphi : G \rightarrow \llbracket 1, m \rrbracket$ . Pour une fonction  $f : \llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow G$ ,  $\varphi \circ f$  va de  $\llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, m \rrbracket$  et  $f$  est surjective si, et seulement si,  $\varphi \circ f$  est surjective. On en déduit que :

$$\text{card } \mathcal{S}(\llbracket 1, p \rrbracket, G) = \text{card } \mathcal{S}(\llbracket 1, p \rrbracket, \llbracket 1, m \rrbracket) = S(p, m) = S(p, \text{card } G)$$

donc :

$$n^p = \sum_{G \in \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)} S(p, \text{card } G)$$

On regroupe maintenant les termes de la somme suivant le nombre d'éléments dans  $G$ , qui peut aller de 0 à  $n$  :

$$\begin{aligned} n^p &= \sum_{m=0}^n \left( \sum_{G \in \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket), \text{card } G=m} S(p, \text{card } G) \right) = \sum_{m=0}^n \left( \sum_{G \in \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket), \text{card } G=m} 1 \right) S(p, m) \\ &= \sum_{m=0}^n C(n, m) S(p, m) \end{aligned}$$

où  $C(n, m)$  désigne le nombre de parties de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  dont le cardinal est  $m$ . On sait que  $C(n, m) = \binom{n}{m}$  donc :

$$n^p = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} S(p, m)$$

**II.B.3)** D'après la question précédente :

$$\forall n \in \llbracket 0, p \rrbracket, n^p = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} S(p, m)$$

On peut donc établir une relation matricielle entre  $(0^p, 1^p, \dots, p^p)$  et  $S(p, 0), S(p, 1), \dots, S(p, p)$  comme dans I.A.7 et l'inverser pour obtenir comme dans I.A.8 :

$$\forall n \in \llbracket 0, p \rrbracket, S(p, n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^p$$

**II.B.4)** Supposons ici  $p < n$ . On a alors  $X^p \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$  donc en appliquant I.B.5 avec  $P = X^p$  :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^p = 0$$

et pour  $p < n$  on a justement  $S(p, n) = 0$ . L'expression obtenue à la question précédente est donc valable quels que soient  $n$  et  $p$ .

**II.C-** Avec les questions précédentes ainsi que II.A.2 et II.A.3 :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n &= S(n, n) = n! \\ \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+1} &= S(n+1, n) = \frac{n(n+1)!}{2} \end{aligned}$$

### Extrait du rapport Partie II.

II.A.2) Le jury s'attendait à ce que cette question soit vraiment immédiate pour tous les candidats. Il n'en est rien.

II.A.3) Cette question est une variation non triviale de la précédente, certes, mais le taux d'échec est vraiment très élevé : seuls quelques dizaines de candidats savent faire ce dénombrement. Il y a une faiblesse dans la compréhension des ensembles finis, une partie pourtant importante de l'algèbre.

II.B.1) La réponse à cette question de cours n'est hélas pas unanime.

**III.A.1)** Par définition on a  $\deg H_0 = 0$  et  $\deg H_k = k$  pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . La famille  $(H_0, \dots, H_n)$  est donc une famille de polynômes échelonnée en degrés, c'est par conséquent une famille libre. C'est de plus une famille d'éléments de  $\mathbb{R}_n[X]$  de cardinal  $n+1$  et  $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$ , par conséquent  $(H_0, \dots, H_n)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

**III.A.2)** On a  $\delta(H_0) = H_0(X+1) - H_0(X) = 0$  et pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on obtient avec un changement d'indice :

$$\begin{aligned}
\delta(H_k) &= H_k(X+1) - H_k(X) = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X+1-j) - \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X-j) \\
&= \frac{1}{k!} \left( (X+1) \prod_{j=1}^{k-1} (X+1-j) - \prod_{j=0}^{k-1} (X-j) \right) \\
&= \frac{1}{k!} \left( (X+1) \prod_{j=0}^{k-2} (X-j) - \prod_{j=0}^{k-1} (X-j) \right) \\
&= \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-2} (X-j) (X+1 - X + (k-1)) \\
&= \frac{k}{k!} \prod_{j=0}^{k-2} (X-j) \\
&= \frac{1}{(k-1)!} \prod_{j=0}^{k-2} (X-j) \\
&= H_{k-1}
\end{aligned}$$

**III.A.3)** La matrice  $M$  est la matrice de  $\tau$  dans la base canonique  $(1, X, \dots, X^n)$  de  $\mathbb{R}_n[X]$ . D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
\tau(H_0) &= H_0 \\
\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \tau(H_k) &= \delta(H_k) + H_k = H_{k-1} + H_k
\end{aligned}$$

donc la matrice  $M'$  est la matrice de  $\tau$  dans la base  $(H_0, H_1, \dots, H_n)$ . Les matrices  $M$  et  $M'$  représentent le même endomorphisme dans des bases différentes, elles sont donc semblables.

**III.A.4)** Considérons  $k, \ell \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . On distingue trois cas :

- Si  $k < \ell$ , alors :

$$\begin{aligned}
\delta(H_\ell) &= H_{\ell-1} \\
\delta^2(H_\ell) &= H_{\ell-2} \\
&\vdots \\
\delta^k(H_\ell) &= H_{\ell-k}
\end{aligned}$$

Comme  $\ell - k > 0$ , 0 est racine de  $H_{\ell-k}$  et ainsi  $\delta(H_{\ell-k})(0) = 0$ ;

- Si  $k = \ell$ , alors on a de la même manière  $\delta^k(H_\ell) = H_{\ell-k} = H_0$  et comme  $H_0$  est constant égal à 1,  $\delta^k(H_\ell)(0) = 1$ ;
- Si  $k > \ell$ , alors  $H_\ell \in \mathbb{R}_{k-1}[X] = \text{Ker } \delta^k$  (question I.B.3) donc  $\delta^k(H_\ell) = 0$  et  $\delta^k(H_\ell)(0) = 0$ .

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\delta^k(H_\ell) &= 1 \quad \text{si } k = \ell \\
&= 0 \quad \text{sinon}
\end{aligned}$$

**III.A.5)** Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ . La famille  $(H_0, \dots, H_n)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$  donc il existe  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  tels que :

$$P = \sum_{j=0}^n a_j H_j$$

Considérons  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , en utilisant la linéarité de  $\delta^k$  on obtient :

$$\delta^k(P) = \sum_{j=0}^n a_j \delta^k(H_j)$$

puis en appliquant en 0 :

$$\delta^k(P)(0) = \sum_{j=0}^n a_j \delta^k(H_j)(0)$$

D'après la question précédente, les termes de la somme d'indice  $j \neq k$  sont nuls. On a alors :

$$\delta^k(P)(0) = a_k \delta^k(H_k)(0) = a_k$$

puisque  $\delta^k(H_k)(0) = 1$ . On en déduit que :

$$P = \sum_{k=0}^n \delta^k(P)(0) H_k$$

**III.B.1)** On pose  $Q = X^3 + 2X^2 + 5X + 7$ . On calcule successivement :

$$\begin{aligned} \delta^0(Q) &= Q = X^3 + 2X^2 + 5X + 7 \\ \delta(Q) &= (X+1)^3 - X^3 + 2((X+1)^2 - X^2) + 5(X+1 - X) \\ &= 3X^2 + 3X + 1 + 2(2X + 1) + 5 \\ &= 3X^2 + 7X + 8 \\ \delta^2(Q) &= 3((X+1)^2 - X^2) + 7(X+1 - X) \\ &= 3(2X + 1) + 7 \\ &= 6X + 10 \\ \delta^3(Q) &= 6 \end{aligned}$$

D'après la question précédente :

$$Q = 7H_0 + 8H_1 + 10H_2 + 6H_3$$

**III.B.2)** Considérons le polynôme  $P = 7H_2 + 8H_3 + 10H_4 + 6H_5$ . On a alors  $P \in \mathbb{R}_5[X]$  et par linéarité de  $\delta^2$  :

$$\delta^2(P) = 7\delta^2(H_2) + 8\delta^2(H_3) + 10\delta^2(H_4) + 6\delta^2(H_5) = 7H_0 + 8H_1 + 10H_2 + 6H_3 = Q = X^3 + 2X^2 + 5X + 7$$

**III.B.3)** On reconnaît une équation linéaire. On note  $(\mathcal{E})$  l'équation définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k = k^3 + 2k^2 + 5k + 7$$

et  $(\mathcal{E}_0)$  l'équation homogène associée, définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, v_{k+2} - 2v_{k+1} + v_k = 0$$

On détaille la méthode générale de résolution sur cet exemple.

**Recherche d'une solution particulière.** D'après la question I.B.4, on a :

$$\delta^2(P) = P(X+2) - 2P(X+1) + P(X) = X^3 + 2X^2 + 5X + 7$$

Soit  $k \in \mathbb{N}$ , en substituant  $k$  à  $X$  on obtient :

$$P(k+2) - 2P(k+1) + P(k) = k^3 + 2k^2 + 5k + 7$$

La suite  $(P(k))_{k \in \mathbb{N}}$  est donc une solution particulière de  $(\mathcal{E})$ .

**Résolution de l'équation homogène.** Les solutions de  $(\mathcal{E}_0)$  sont des suites récurrentes linéaires d'ordre 2. L'équation caractéristique est  $r^2 - 2r + 1 = 0$ , cette équation admet une racine double 1 et les solutions de  $(\mathcal{E}_0)$  sont les suites  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$  pour lesquelles il existe  $A, B \in \mathbb{R}$  tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, v_k = Ak + B$$

**Résolution de l'équation de départ.** Considérons une suite réelle  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , on définit la suite  $(v_k = P(k) - u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . On a alors :

$$\begin{aligned} (u_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ solution de } (\mathcal{E}) &\iff \forall k \in \mathbb{N}, u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k = k^3 + 2k^2 + 5k + 7 \\ &\iff \forall k \in \mathbb{N}, u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k = P(k+2) - 2P(k+1) + P(k) \\ &\iff \forall k \in \mathbb{N}, v_{k+2} - 2v_{k+1} + v_k = 0 \\ &\iff (v_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ solution de } (\mathcal{E}_0) \end{aligned}$$

Les solutions de  $(\mathcal{E})$  sont donc les suites  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  pour lesquelles il existe  $A, B \in \mathbb{R}$  tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_k = P(k) + Ak + B$$

**III.C.1)** On a bien entendu  $H_0(k) = 1$  quel que soit  $k \in \mathbb{Z}$ . On considère pour la suite un entier  $n \geq 1$ . Le polynôme  $H_n$  a pour racines  $0, \dots, n-1$  donc :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, H_n(k) = 0$$

Pour un entier  $k \geq n$ , on a :

$$H_n(k) = \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (k-j) = \frac{k(k-1) \cdots (k-n+1)}{n!} = \frac{k!}{n!(n-k)!} = \binom{k}{n}$$

On considère maintenant un entier  $k < 0$  et on pose  $p = -k > 0$ , on a :

$$H_n(k) = \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (-p - j) = \frac{(-1)^n}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (p + j) = (-1)^n \frac{p(p+1) \cdots (p+n-1)}{n!} = (-1)^n \frac{p+n-1!}{n!p-1!} = (-1)^n \binom{p+n-1}{n}$$

**III.C.2)** Comme les coefficients binomiaux sont des entiers, d'après la question précédente  $H_n(k) \in \mathbb{Z}$  quels que soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \in \mathbb{Z}$  ce qui signifie que  $H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**III.C.3)** On suppose que  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  et, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $P(k) \in \mathbb{Z}$ . On a alors :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \delta(P)(k) = P(k+1) - P(k) \in \mathbb{Z}$$

donc  $\delta(P)$  est à valeurs entières sur les entiers.

**III.C.4)** Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ . On suppose d'abord que  $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ . D'après ce qui précède, il en est de même de  $\delta(P)$  et, par une récurrence immédiate, il en est de même de  $\delta^j(P)$  pour tout  $j \in \mathbb{N}$ . D'après la question III.A.5, les coefficients de  $P$  dans la base  $(H_0, \dots, H_n)$  sont les  $(\delta^j(P)(0))_{0 \leq j \leq n}$  et se sont donc des nombres entiers. Réciproquement, on suppose que  $P$  s'écrit :

$$P = \sum_{j=0}^n a_j H_j$$

avec  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ . Alors pour  $k \in \mathbb{Z}$  :

$$P(k) = \sum_{j=0}^n a_j H_j(k)$$

D'après la question III.C.2,  $H_0(k), \dots, H_n(k)$  sont des entiers donc  $P(k)$  est un entier comme somme de produits de nombres entiers.

**III.C.5)** On suppose que  $d \in \mathbb{N}$  et que  $P \in \mathbb{R}_d[X]$  est à valeurs entières sur les entiers avec  $\deg P = d$ . D'après la question précédente, il existe des entiers  $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{Z}$  tels que :

$$P = \sum_{k=0}^d a_k H_k = a_0 + \sum_{k=1}^d \frac{a_k}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X - j)$$

On a alors :

$$d!P = d!a_0 + \sum_{k=1}^d a_k \underbrace{\frac{d!}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X - j)}_{=T_k}$$

Pour  $k \in \llbracket 1, d \rrbracket$ ,  $d!/k!$  est un nombre entier, de même que  $a_k$  et  $d!a_0$ . De plus,  $T_k$  est un polynôme à coefficients entiers comme produit de polynômes à coefficients entiers. Finalement,  $d!P$  est un polynôme à coefficients entiers comme somme de produits de polynômes à coefficients entiers. Pour la réciproque, considérons le polynôme :

$$P = X^2 + \frac{1}{2}$$

On a  $d = \deg P = 2$  et  $d!P = 2P$  est à coefficients entiers. En revanche,  $P(0) = 1/2 \notin \mathbb{Z}$  donc  $P$  n'est pas à valeurs entières sur les entiers. La réciproque est fausse.

### Extrait du rapport Partie III.

- III.A.1) La factorisation donnée a incité certains à donner une démonstration directe, ce qui est possible par évaluation en nombres entiers.
- III.A.2) Des calculs souvent trop longs et des erreurs.
- III.A.3) Un raisonnement direct était voué à l'échec, le changement de base étant l'expression (difficile) des  $H_k$  en fonction de  $P_k$ .
- III.B.1) Comme en III.A.2, quelques candidats faibles ont su faire le calcul. À l'inverse, ledit calcul est parfois bâclé dans de bonnes copies.
- III.C Quelques bonnes copies abordent cette partie. La question 1 est souvent correcte mais la conséquence sur  $H_n(\mathbb{Z})$  ne semble pas automatique. Il est d'ailleurs apparu lors de la partie I que certains étudiants connaissent les coefficients du binôme comme résultant du triangle de Pascal mais sans bien maîtriser la formule donnée par l'énoncé. La question 5 a reçu quelques bonnes réponses.

**IV.A.1)** La fonction  $x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto x + 1$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^{+*}$ . Si  $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $C^\infty$ , alors par composition  $x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto f(x + 1)$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et ainsi  $\delta(f)$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  comme différence de deux fonctions de classe  $C^\infty$ . On a de plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, (\delta(f))'(x) = f'(x + 1) - f'(x) = \delta(f')(x)$$

et ainsi  $(\delta(f))' = \delta(f')$ . Cette fonction sera notée dans la suite  $\delta(f)'$  ou  $\delta(f')$ .

**IV.A.2)** Même justification qu'à la question I.B.4 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \delta^n(f)(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} f(x + j)$$

**et toujours par vraiment au programme. À vérifier.**

**IV.A.3)** Soit  $x > 0$ . L'application  $f$  est continue sur  $[x, x + 1]$  et dérivable sur  $]x, x + 1[$ . D'après l'égalité des accroissements finis, il existe  $y \in ]x, x + 1[$  tel que :

$$f(x + 1) - f(x) = f'(y)$$

Posons  $y_1 = y - x$ , on a alors  $y_1 \in ]0, 1[$  et  $\delta(f)(x) = f'(x + y_1)$ .

**IV.A.4)** On considère pour  $n \in \mathbb{N}^*$  l'hypothèse de récurrence :

$$\mathcal{H}(n) : \forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R}), \forall x > 0, \exists y_n \in ]0, n[, \underbrace{\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(x + j)}_{=\delta^n(f)(x)} = f^{(n)}(x + y_n)$$



D'après la question précédente,  $\mathcal{H}(1)$  est vraie. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on suppose  $\mathcal{H}(n)$  vraie. Soient  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$  et  $x > 0$ . En appliquant l'hypothèse de récurrence à  $g = \delta(f)$  qui est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , il existe  $y_n \in ]0, n[$  tel que :

$$\delta^n(g)(x) = g^{(n)}(x + y_n)$$

Or  $\delta^n(g) = \delta^{n+1}(f)$  et  $g^{(n)} = (\delta(f))^{(n)} = \delta(f^{(n)})$  par une récurrence immédiate à partir de IV.A.1, donc :

$$\delta^{n+1}(f)(x) = \delta(f^{(n)})(x + y_n) = f^{(n)}(x + 1 + y_n) - f^{(n)}(x + y_n)$$

On applique l'égalité des accroissements finis à  $f^{(n)}$  continue sur  $[x + y_n, x + 1 + y_n]$  et dérivable sur  $]x + y_n, x + 1 + y_n[$  : il existe  $y \in ]x + y_n, x + 1 + y_n[$  tel que

$$f^{(n)}(x + 1 + y_n) - f^{(n)}(x + y_n) = f^{(n+1)}(y)$$

Posons  $y_{n+1} = y - x$ , on a  $y_{n+1} \in ]y_n, y_n + 1[$ . On a alors  $0 < y_n < y_{n+1} < y_n + 1 < n + 1$  donc  $y_{n+1} \in ]0, n + 1[$  et

$$\delta^{n+1}(f)(x) = \delta(f^{(n)})(x + y_n) = f^{(n+1)}(x + y_{n+1})$$

Par conséquent,  $\mathcal{H}(n + 1)$  est vraie. On a démontré par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R}), \forall x > 0, \exists y_n \in ]0, n[, \underbrace{\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(x + j)}_{=\delta^n(f)(x)} = f^{(n)}(x + y_n)$$

**IV.B.1)** Considérons un entier  $k$  strictement positif. Cet entier naturel peut s'écrire comme un produit de nombres premiers :

$$k = p_1 \cdots p_r$$

avec  $r \in \mathbb{N}$  et  $p_1, \dots, p_r$  premiers (non nécessairement distincts, avec éventuellement  $r = 0$  dans le cas où  $k = 1$ ). On a alors :

$$k^\alpha = p_1^\alpha \cdots p_r^\alpha$$

Par hypothèse,  $p_1^\alpha, \dots, p_r^\alpha$  sont des entiers naturels donc  $k^\alpha$  est un entier naturel comme produit d'entiers naturels et comme  $k \neq 0$  on a  $k^\alpha \neq 0$  donc  $k^\alpha \in \mathbb{N}^*$ .

**IV.B.2)** Par hypothèse,  $m = 2^\alpha \in \mathbb{N}$ . De plus, on a par définition :

$$m = 2^\alpha = \exp(\alpha \ln 2)$$

donc  $m > 0$  et ainsi  $m \geq 1$ . On a ensuite  $\alpha \ln(2) = \ln(m)$  et comme  $\ln(m) \geq 0$  et  $\ln(2) > 0$  on en déduit  $\alpha \geq 0$ .

**IV.B.3)** Notons que la fonction  $f_\alpha$  est bien de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . Supposons tout d'abord que  $\alpha \in \mathbb{N}$ . La fonction  $f_\alpha$  est alors une fonction polynomiale donc l'une de ses dérivées  $n$ -ième est nulle. En particulier, il existe  $n \in \mathbb{N}$  et  $x > 0$  tels que  $f_\alpha^{(n)}(x) = 0$ . (plus précisément,

pour tout  $x > 0$ , on aura  $f_\alpha^{(\alpha+1)}(x) = 0$ ). Réciproquement, supposons qu'il existe un entier  $n \in \mathbb{N}$  et un réel  $x_0 > 0$  tels que  $f_\alpha^{(n)}(x_0) = 0$ . On obtient par une récurrence immédiate :

$$\forall x > 0, f_\alpha^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)x^{\alpha-n} = \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1) \exp((\alpha-n) \ln(x))$$

et ainsi :

$$\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1) \exp((\alpha-n) \ln(x_0)) = 0$$

Comme  $\exp((\alpha-n) \ln(x_0)) \neq 0$  on a  $\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1) = 0$ . Un produit est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul donc  $\alpha \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  et  $\alpha$  est donc un entier naturel. On a démontré l'équivalence.

**IV.C.1)** Sachant que  $x \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $x+j$  est un entier strictement positif donc  $f_\alpha(x+j) = (x+j)^\alpha$  est un entier (question IV.B.1). Les coefficients binomiaux sont des entiers donc la somme

$$\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(x+j)$$

est un entier relatif comme somme de produits d'entiers relatifs.

**IV.C.2)** On a déjà obtenu :

$$\forall t > 0, f_\alpha^{(n)}(t) = \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1) \exp((\alpha-n) \ln(t))$$

Par définition de la partie entière,  $\lfloor \alpha \rfloor \leq \alpha < \lfloor \alpha \rfloor + 1$  donc  $\alpha < n$  et ainsi :

$$\exp((\alpha-n) \ln(t)) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

Par ailleurs, on sait que  $y_n \in ]0, n[$  donc  $x + y_n \geq x \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$  et ainsi, par composition des limites :

$$f_\alpha^{(n)}(x + y_n) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$$

(le terme  $\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)$  est une constante).

**IV.C.3)** Les quantités  $\alpha$  et  $n$  étant fixées, posons pour un entier  $x \in \mathbb{N}^*$  :

$$m_x = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(x+j) = f_\alpha^{(n)}(x + y_n)$$

D'après la question précédente,  $m_x \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$ ; par définition de la limite, il existe  $x_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que :

$$\forall x \geq x_0, |m_x| < \frac{1}{2}$$

En particulier,  $|m_{x_0}| < 1/2$ . D'après IV.C.1,  $m_{x_0}$  est un entier, donc nécessairement  $m_{x_0} = f_\alpha^{(n)}(x + y_n) = 0$ . La dérivée  $n$ -ième de  $f_\alpha$  s'annule en  $x + y_n > 0$  donc d'après la question IV.B.3,  $\alpha$  est un entier naturel.

**Extrait du rapport Partie IV.** Cette partie n'a pas été abordée par suffisamment de candidats pour autoriser un commentaire pertinent. C'est dommage car d'autres compétences étaient demandées et les questions permettaient la progression vers un objectif intéressant (étude des fonctions  $t \mapsto t^\alpha$  qui envoient  $\mathbb{N}^*$  dans lui-même, sorte de pendant analytique de la partie III.C).