



## TD 28 : Variables aléatoires discrètes (compléments)

Indépendance et covariance

**Exercice 1** (*Minimum de deux v.a.d indépendantes*). Trois personnes  $A_1, A_2, A_3$  entrent en même temps dans une banque qui ne comporte que deux guichets ;  $A_1$  et  $A_2$  sont servies immédiatement tandis que  $A_3$  doit attendre qu'un guichet se libère pour être servie. On suppose que le temps nécessaire pour servir le client  $A_i$  ( $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ ) est une variable aléatoire  $X_i$  suivant une loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$ . On suppose que les variables aléatoires  $X_1, X_2, X_3$  sont indépendantes. On note  $T$  la variable aléatoire égale au temps d'attente de  $A_3$  avant de pouvoir être servie et  $Z$  le temps écoulé entre l'arrivée de  $A_3$  et son départ.

- (a) Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , déterminer la probabilité de l'évènement  $[T > k]$ . En déduire la loi de  $T$ .
- (b) Déterminer l'espérance et la variance de  $T$ .
- (c) Déterminer l'espérance de  $Z$ .

**Réponse.** On a  $X_1, X_2$  et  $X_3$  qui suivent la loi  $\mathcal{G}(p)$ . Par définition,  $T = \min(X_1, X_2)$  et  $Z = T + X_3$ .

- (a) On a l'égalité entre évènements :

$$[T > k] = [X_1 > k] \cap [X_2 > k]$$

en effet, le temps d'attente pour  $A_3$  sera strictement supérieur à  $k$  si, et seulement si, il faut un temps strictement supérieur à  $k$  à la fois pour servir  $A_1$  et  $A_2$ . On a donc :

$$\mathbf{P}(T > k) = \mathbf{P}(X_1 > k, X_2 > k) = \mathbf{P}(X_1 > k)\mathbf{P}(X_2 > k)$$

La variable aléatoire  $X_1$  suit la loi  $\mathcal{G}(p)$ , on peut considérer que  $X_1$  est la rang d'apparition du premier succès dans une répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre  $p$ . La condition  $X_1 > k$  signifie alors que les tentatives numérotées de 1 à  $k$  sont des échecs. Ainsi :

$$\mathbf{P}(X_1 > k) = (1 - p)^k$$

(**remarque** : on peut aussi obtenir ceci en écrivant  $\mathbf{P}(X_1 > k)$  comme somme d'une série). On a de même  $\mathbf{P}(X_2 > k) = (1 - p)^k$  donc :

$$\mathbf{P}(T > k) = (1 - p)^{2k}$$

On note que  $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$ . Le résultat que l'on vient d'obtenir reste donc valable pour  $k = 0$  puisque  $\mathbf{P}(T > 0) = 1$ . Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a l'égalité entre évènements :

$$[T > k - 1] = [T > k] \cup [T = k]$$

De plus les évènements  $[T > k]$  et  $[T = k]$  sont incompatibles donc :

$$\mathbf{P}(T > k - 1) = \mathbf{P}(T > k) + \mathbf{P}(T = k)$$

ou encore :

$$\mathbf{P}(T = k) = \mathbf{P}(T > k - 1) - \mathbf{P}(T > k)$$

(**remarque** : on peut directement écrire ceci en remarquant que  $[T > k] \subset [T > k - 1]$  et  $[T > k - 1] \setminus [T > k] = [T = k]$ ). Avec ce qui précède :

$$\mathbf{P}(T = k) = (1 - p)^{2k-2} - (1 - p)^{2k} = (1 - p)^{2k-2}(1 - (1 - p)^2) = ((1 - p)^2)^{k-1}(1 - (1 - p)^2)$$

Posons  $r = 1 - (1 - p)^2$ , alors  $r \in ]0, 1[$  et :

$$\mathbf{P}(T = k) = (1 - r)^{k-1} r$$

On en déduit que  $T \hookrightarrow \mathcal{G}(r)$  avec  $r = 1 - (1 - p)^2$ .

(b) Par conséquent, d'après le cours,  $\mathbf{E}(T) = \frac{1}{r}$  et  $\mathbf{V}(T) = \frac{1-r}{r^2}$  avec  $r = 1 - (1 - p)^2$ .

(c) Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbf{E}(Z) = \mathbf{E}(T + X_3) = \mathbf{E}(T) + \mathbf{E}(X_3) = \frac{1}{r} + \frac{1}{p} = \frac{1}{1 - (1 - p)^2} + \frac{1}{p} = \frac{3 - p}{p(2 - p)}$$

**Exercice 2** (*Décorréllées mais pas indépendantes*). On considère une v.a.d  $X$  telle que  $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$  et  $\mathbf{P}(X = -1) = \mathbf{P}(X = 0) = \mathbf{P}(X = 1)$  et on pose  $Y = X^2$ . Démontrer que  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes. Calculer  $\mathbf{Cov}(X, Y)$ .

*Réponse.* On a nécessairement :

$$\mathbf{P}(X = -1) = \mathbf{P}(X = 0) = \mathbf{P}(X = 1) = \frac{1}{3}$$

On a ensuite  $Y(\Omega) = \{0, 1\}$  puis :

$$\mathbf{P}(Y = 0) = \mathbf{P}(X^2 = 0) = \mathbf{P}(X = 0) = \frac{1}{3}$$

$$\mathbf{P}(Y = 1) = 1 - \mathbf{P}(Y = 0) = \frac{2}{3}$$

Intuitivement, si on connaît la valeur de  $X$  alors on connaît celle de  $Y$ , donc  $X$  et  $Y$  ne peuvent pas être indépendantes. Plus précisément, on a par exemple :

$$\mathbf{P}(X = 0, Y = 0) = \mathbf{P}(X = 0, X^2 = 0) = \mathbf{P}(X = 0) = \frac{1}{3}$$

$$\mathbf{P}(X = 0)\mathbf{P}(Y = 0) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$$

Ainsi,  $\mathbf{P}(X = 0, Y = 0) \neq \mathbf{P}(X = 0)\mathbf{P}(Y = 0)$  donc  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes.

**Calcul de  $\mathbf{Cov}(X, Y)$ , méthode 1.** On commence par utiliser le résultat du cours pour calculer  $\mathbf{E}(XY)$  :

$$\mathbf{E}(XY) = \sum_{i=-1}^1 \sum_{j=0}^1 i j \mathbf{P}(X = i, Y = j)$$

où  $i$  représente les valeurs prises par  $X$ ,  $j$  les valeurs prises par  $Y$  et  $\mathbf{P}(X = i, Y = j)$  est la probabilité d'avoir  $(X, Y) = (i, j)$ . Dans cette somme, les termes pour  $j = 0$  sont nuls de même que les termes pour  $i = 0$ . Il ne reste donc que deux termes :  $(i, j) = (-1, 1)$  et  $(i, j) = (1, 1)$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(XY) &= (-1) \times 1 \times \mathbf{P}(X = -1, Y = 1) + 1 \times 1 \times \mathbf{P}(X = 1, Y = 1) \\ &= -\mathbf{P}(X = -1, Y = 1) + \mathbf{P}(X = 1, Y = 1) = -\mathbf{P}(X = -1, X^2 = 1) + \mathbf{P}(X = 1, X^2 = 1) \\ &= -\mathbf{P}(X = -1) + \mathbf{P}(X = 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

De plus, on a par définition :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=-1}^1 i \mathbf{P}(X = i) = -\mathbf{P}(X = -1) + 0\mathbf{P}(X = 0) + \mathbf{P}(X = 1) = 0$$

Ainsi,  $\text{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = 0$ .

**Méthode 2.** On reprend  $\mathbf{E}(X) = 0$  trouvé précédemment et on utilise le fait que  $X^3 = X$  puisque  $X$  ne prend que les valeurs  $-1, 0, 1$  :

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(X^3) - 0 = \mathbf{E}(X) = 0$$

**Remarque :** ceci montre que deux v.a.d  $X$  et  $Y$  peuvent être décorréllées (ce qui signifie que  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ ) sans pour autant être indépendantes.

**Exercice 3.** On considère un réel  $a$  ainsi que deux v.a.d  $X$  et  $Y$  telles que  $X(\Omega) = \mathbb{N}$ ,  $Y(\Omega) = \mathbb{N}$  et :

$$\forall k, n \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(X = n, Y = k) = \frac{a}{n!2^{k+1}}$$

Déterminer  $a$  ainsi que les lois marginales  $X$  et  $Y$ . Les v.a.d  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes?

**Réponse. Loi de  $X$ .** On sait que  $X(\Omega) = \mathbb{N}$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements  $[Y = k]$ ,  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\mathbf{P}(X = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n, Y = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a}{n!2^{k+1}} = \frac{a}{n!}$$

On sait par ailleurs que  $[X = n]$ ,  $n \in \mathbb{N}$  est un système complet d'événements donc :

$$1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a}{n!} = ae^1$$

donc  $a = e^{-1}$  et ainsi  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$ .

**Loi de  $Y$ .** Soit  $k \in \mathbb{N}$ , on utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements  $[X = n]$ ,  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\mathbf{P}(Y = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n, Y = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-1}}{n!2^{k+1}} = \frac{1}{2^{k+1}}$$

**Étude de l'indépendance.** Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\mathbf{P}(X = n)\mathbf{P}(Y = k) = \frac{e^{-1}}{n!} \cdot \frac{1}{2^{k+1}} = \mathbf{P}(X = n, Y = k)$$

Par définition,  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

**Exercice 4** (Oral CCP, PC, 2016, Exercice secondaire). On suppose que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n$  est une v.a.d avec  $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ ,  $p \in ]0, 1[$  et les  $X_n$  sont indépendantes. On pose pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $Y_n = X_n \times X_{n+1}$ .

(1) Déterminer la loi de  $Y_n$ , son espérance et sa variance.

(2) Les v.a.d  $Y_i$  et  $Y_j$  sont-elles indépendantes?

**Réponse.**

(a) La variable  $Y_n$  ne peut prendre que les valeurs 0 et 1. On a donc nécessairement  $Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p_n)$  avec :

$$\begin{aligned} p_n &= \mathbf{P}(Y_n = 1) = \mathbf{P}(X_n X_{n+1} = 1) = \mathbf{P}(X_n = 1, X_{n+1} = 1) \\ &= \mathbf{P}(X_n = 1)\mathbf{P}(X_{n+1} = 1) \quad (\text{indépendance de } X_n \text{ et } X_{n+1}) \\ &= p^2 \end{aligned}$$

On a donc  $Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p^2)$ . Ainsi, d'après le cours,  $\mathbf{E}(Y_n) = p_n = p^2$  et  $\mathbf{V}(Y_n) = p_n(1 - p_n) = p^2(1 - p^2)$ .

(b) Considérons par exemple :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y_0 = 1 \cap Y_1 = 1) &= \mathbf{P}(X_0 = 1 \cap X_1 = 1 \cap X_2 = 1) = p^3 \\ \mathbf{P}(Y_0 = 1)\mathbf{P}(Y_1 = 1) &= p^4\end{aligned}$$

Les v.a.d.  $Y_0$  et  $Y_1$  ne sont pas indépendantes. Les v.a.d.  $Y_n$  ne sont donc pas indépendantes deux à deux.

## Couples et loi conditionnelles

**Exercice 5.** On dispose d'une pièce de monnaie donnant pile avec la probabilité  $p$  et face avec la probabilité  $q = 1 - p$  (avec  $p \in ]0, 1[$ ). On lance cette pièce, les lancers étant indépendants les uns des autres, et on note  $N$  le nombre aléatoire de lancers nécessaires à la première apparition de pile (on pose  $N = -1$  si pile n'apparaît jamais). Quand pile apparaît au bout de  $n$  lancers, on effectue une série de  $n$  lancers avec cette même pièce et on note  $X$  le nombre de pile obtenus au cours de cette série.

- Quelle est la loi de  $N$ ? Déterminer la loi du couple  $(N, X)$ .
- Calculer  $\mathbf{P}(X = 0)$  et  $\mathbf{P}(X = 1)$ .
- Pour tout entier naturel  $k$  non nul, exprimer  $\mathbf{P}(X = k)$  sous forme d'une série.
- Calculer la somme de cette série. On rappelle que  $\sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} x^{k-r} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$  pour  $|x| < 1$ .
- Déterminer l'espérance de  $X$ . Pourquoi ce résultat est-il raisonnable?

*Réponse.*

- On a  $N(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{-1\}$ . On reconnaît que  $N$  est le rang d'apparition du premier succès (obtenir *pile*) dans une répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre  $p$ . Ainsi, pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\mathbf{P}(N = n) = (1 - p)^{n-1} p$$

L'énoncé convient également de poser  $N = -1$  lorsque *pile* n'apparaît jamais. On a alors :

$$\mathbf{P}(N = -1) = 0$$

On a  $X(\Omega) = \mathbb{N}$ . Considérons  $k \in \mathbb{N}$ . On a déjà :

$$\mathbf{P}(N = -1, X = k) = 0 \quad \text{car} \quad \mathbf{P}(N = -1) = 0$$

Considérons ensuite  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a immédiatement :

$$\mathbf{P}(N = n, X = k) = 0 \quad \text{si} \quad k > n$$

Supposons finalement  $k \leq n$ , alors avec la formule des probabilités composées :

$$\mathbf{P}(N = n, X = k) = \mathbf{P}(N = n) \mathbf{P}_{N=n}(X = k) = (1 - p)^{n-1} p \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

car, si l'on fait l'hypothèse que  $N = n$ , la variable aléatoire  $X$  compte le nombre de succès parmi  $n$  épreuves de Bernoulli indépendantes et de même probabilité de succès  $p$ . En résumé :

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(N = -1, X = k) &= 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(N = n, X = k) = 0 \quad \text{si} \quad k > n \\ &= (1 - p)^{n-1} p \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad \text{sinon}\end{aligned}$$

- (b) On utilise la formule des probabilités totales avec le système quasi complet d'évènements  $[N = n]$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$  (on ne considère pas l'évènement  $[N = -1]$  qui est de probabilité nulle) :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X = 0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(N = n, X = 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{0} p(1-p)^{2n-1} = p(1-p) \sum_{n=0}^{+\infty} (1-p)^{2n} \\ &= \frac{p(1-p)}{1-(1-p)^2} = \frac{1-p}{2-p}\end{aligned}$$

et sur le même principe :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X = 1) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(N = n, X = 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{1} p^2(1-p)^{2n-2} = p^2 \sum_{n=1}^{+\infty} ((1-p)^2)^{n-1} \\ &= \frac{p^2}{(1-(1-p)^2)^2} = \frac{1}{(2-p)^2}\end{aligned}$$

- (c) Toujours sur le même principe :

$$\mathbf{P}(X = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(N = n, X = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^{k+1}(1-p)^{2n-k-1}$$

On a en effet  $\mathbf{P}(N = n, X = k) = 0$  si  $k > n$ , on ne garde donc dans la somme que les termes d'indice  $n \geq k$ . On obtient :

$$\mathbf{P}(X = k) = p^{k+1}(1-p)^{k-1} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} ((1-p)^2)^{n-k}$$

- (d) Avec le résultat donné dans l'énoncé :

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{p^{k+1}(1-p)^{k-1}}{(1-(1-p)^2)^{k+1}} = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}$$

- (e) On calcule alors l'espérance de  $X$ , sous réserve d'existence :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{(2-p)^2} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left( \frac{1-p}{2-p} \right)^{k-1}$$

Justifions la convergence absolue de cette série. On sait que la série entière  $\sum kx^{k-1}$  a le même rayon de convergence que  $\sum x^k$  c'est à dire 1. Or  $0 < 1-p < 2-p$  donc :

$$0 < \frac{1-p}{2-p} < 1$$

Ainsi  $X$  admet une espérance car la série  $\sum_{k=1}^{+\infty} k \left( \frac{1-p}{2-p} \right)^{k-1}$  converge (absolument) et :

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1}{(2-p)^2 \left( 1 - \frac{1-p}{2-p} \right)^2} = 1$$

(ce calcul peut s'effectuer à l'aide du résultat rappelé dans l'énoncé, dans le cas particulier  $r = 1$ ). **Remarque :** le résultat est raisonnable car le nombre moyen de pile sur une séquence de  $n$  lancers est  $np$  (loi binomiale) alors que l'espérance de  $N$  est  $1/p$  (loi géométrique), le produit  $np$  est donc en moyenne égal à 1.

## Séries génératrices

**Exercice 6.** Soient  $X$  et  $Y$  des v.a.d indépendantes qui suivent une loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ .

- (a) Déterminer la série génératrice de  $X$  et  $3Y$ . En déduire la série génératrice de  $Z = X + 3Y$ .
- (b) Les v.a.d  $X$  et  $Z$  sont-elles indépendantes?

*Réponse.*

- (a) Comme étudié en classe :

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n) t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} t^n = e^{-\lambda} e^{\lambda t}$$

cette série entière ayant pour rayon de convergence  $+\infty$ . Concernant  $3Y$ , on a déjà pour  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\mathbf{P}(3Y = 3k) = \mathbf{P}(Y = k)$$

Ensuite, pour  $n \in \mathbb{N}$  qui n'est pas divisible par 3, l'évènement  $[3Y = n]$  est impossible donc :

$$\mathbf{P}(3Y = n) = 0$$

On a alors :

$$\begin{aligned} G_{3Y}(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(3Y = n) t^n = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ 3|n}} \mathbf{P}(3Y = n) t^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(3Y = 3k) t^{3k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = k) (t^3)^k \\ &= G_Y(t^3) = e^{-\lambda} e^{\lambda t^3} \end{aligned}$$

Les v.a.d  $X$  et  $Y$  sont indépendantes donc d'après le cours  $X$  et  $3Y$  sont indépendantes et ainsi :

$$G_Z(t) = G_{X+3Y}(t) = G_X(t) G_{3Y}(t) = e^{-2\lambda} e^{\lambda t} e^{\lambda t^3}$$

- (b) Intuitivement, si on sait par exemple que  $X \geq 1$  alors on en déduit que  $Z \geq 1$ . Une information sur  $X$  permet donc d'obtenir une information sur  $Z$ , donc  $X$  et  $Z$  ne sont pas indépendantes. Plus formellement on a par exemple :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z = 0, X = 0) &= \mathbf{P}(X = 0, X + 3Y = 0) = \mathbf{P}(X = 0, Y = 0) = \mathbf{P}(X = 0) \mathbf{P}(Y = 0) = \mathbf{P}(X = 0)^2 \\ \mathbf{P}(Z = 0) &= \mathbf{P}(X + 3Y = 0) = \mathbf{P}(X = 0, Y = 0) = \mathbf{P}(X = 0)^2 \end{aligned}$$

car  $X$  et  $Y$  sont à valeurs entières donc  $X + 3Y = 0$  est équivalent à  $X = Y = 0$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z = 0, X = 0) &= \mathbf{P}(X = 0)^2 \\ \mathbf{P}(Z = 0) \mathbf{P}(X = 0) &= \mathbf{P}(X = 0)^3 \end{aligned}$$

Or  $\mathbf{P}(X = 0) \neq 0$  et  $\mathbf{P}(X = 0) \neq 1$  donc  $\mathbf{P}(X = 0)^2 \neq \mathbf{P}(X = 0)^3$  et ainsi  $X$  et  $Z$  ne sont pas indépendantes.

**Exercice 7** (Oral Centrale, PC, 2017). On considère une suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  de variables aléatoires indépendantes de loi  $\mathcal{B}(p)$ . Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ , on pose  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ .

(1) Donner la loi de  $S_n$ .

(2) Dans quelle mesure peut-on dire que  $S_n/n$  est proche de  $p$ ?

Soit  $t \in \mathbb{N}$ . On lui associe la variable aléatoire

$$N_t = \text{card} \{k \in \mathbb{N}^* \mid S_k \leq t\}$$

On remarque alors l'égalité  $[N_t = k] = [S_k = t] \cap [S_{k+1} > t]$ .

(3) Déterminer la loi de  $N_t$ .

(4) Déterminer la fonction génératrice de  $N_t$ .

*Réponse.*

(1) La variable aléatoire  $S_n$  compte le nombre de succès dans  $n$  épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre  $p$ . On a donc  $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ .

(2) Les variables aléatoires  $(X_n)_{n \geq 1}$  sont indépendantes, suivent la même loi et admettent un moment d'ordre 2 car ce sont des v.a. finies. En particulier, elles admettent toutes la même espérance  $p$  et d'après la loi faible des grands nombres :

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbf{P} \left( \left| \frac{S_n}{n} - p \right| \geq \varepsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

(3) La variable aléatoire  $N_t$  représente le nombre de répétitions (de l'expérience de Bernoulli) effectuées durant lesquelles le nombre de succès reste inférieur à  $t$ . De manière équivalente,  $N_t$  représente le rang de la dernière expérience de Bernoulli pour laquelle le nombre total de succès est égal à  $t$  (d'où l'expression donnée dans l'énoncé). En particulier, on a toujours  $N_t \geq t$  car il faut au moins réaliser  $t$  expériences pour avoir  $t$  succès. On a donc  $N_t(\Omega) = \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq t\}$ . Pour  $k \geq t$ , avec l'indication de l'énoncé :

$$\mathbf{P}(N_t = k) = \mathbf{P}(S_k = t \cap S_{k+1} > t)$$

Attention :  $S_k$  et  $S_{k+1}$  ne sont pas indépendantes. On peut (par exemple) utiliser la formule des probabilités composées :

$$\mathbf{P}(N_t = k) = \mathbf{P}(S_k = t) \mathbf{P}_{S_k=t}(S_{k+1} > t)$$

Or, si l'on fait l'hypothèse que  $S_k = t$ , avoir  $S_{k+1} > t$  revient à avoir  $X_{k+1} = 1$ . Ainsi :

$$\mathbf{P}(N_t = k) = \mathbf{P}(S_k = t) \mathbf{P}_{S_k=t}(X_{k+1} = 1)$$

Comme  $S_k$  ne dépend que de  $X_1, \dots, X_k$  qui sont indépendantes de  $X_{k+1}$ , on a :

$$\mathbf{P}(N_t = k) = \mathbf{P}(S_k = t) \mathbf{P}(X_{k+1} = 1) = \binom{k}{t} p^{t+1} (1-p)^{k-t}$$

Autre rédaction possible :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N_t = k) &= \mathbf{P}(S_k = t, S_{k+1} > t) = \mathbf{P}(S_k = t, S_k + X_{k+1} > t) = \mathbf{P}(S_k = t, t + X_{k+1} > t) \\ &= \mathbf{P}(S_k = t, X_{k+1} > 0) = \mathbf{P}(S_k = t, X_{k+1} = 1) \end{aligned}$$

puis on poursuit de même avec l'indépendance de  $S_k$  et  $X_{k+1}$ .

(4) Pour  $t \in [-1, 1]$  (au moins), on a :

$$\begin{aligned}
 G_{N_t}(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(N_t = k) x^k = \sum_{k=t}^{+\infty} p^{t+1} \binom{k}{t} (1-p)^{k-t} x^k \\
 &= \sum_{k=t}^{+\infty} p^{t+1} \frac{k!}{t!(k-t)!} (1-p)^{k-t} x^k \\
 &= \frac{p^{t+1} x^t}{t!} \sum_{k=t}^{+\infty} k(k-1) \cdots (k-t+1) (1-p)^{k-t} x^{k-t} \\
 &= \frac{p^{t+1} x^t}{t!} \sum_{k=t}^{+\infty} k(k-1) \cdots (k-t+1) u^{k-t} \quad \text{avec } u = (1-p)x \\
 &= \frac{p^{t+1} x^t}{t!} \frac{d^t}{du^t} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} u^k \right) = \frac{p^{t+1} x^t}{t!} \frac{d^t}{du^t} \left( \frac{1}{1-u} \right) = \frac{p^{t+1} x^t}{(1-u)^{t+1}} \\
 &= \frac{p^{t+1} x^t}{(1 - (1-p)x)^{t+1}}
 \end{aligned}$$

**Remarque :** ce n'est pas demandé dans l'énoncé mais on peut en déduire  $\mathbf{E}(N_t) = (t+1-p)/p$ .

### Exercices plus théoriques

**Exercice 8 \***. On considère une suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  de v.a. à valeurs réelles, mutuellement indépendantes et de même loi, admettant toutes un moment d'ordre 2. On suppose que  $\mathbf{E}(X_1) \neq 0$ . Déterminer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left( \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} > 0 \right)$$

*Réponse.* Pour simplifier, on note  $\bar{X}_n$  la moyenne de  $X_1, \dots, X_n$  :

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

Posons également  $m = \mathbf{E}(X_1)$ , on sait que  $m \neq 0$ .

**Intuitivement**,  $\bar{x}_n$  va tendre vers  $m$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$  (loi faible des grands nombres). Or  $m \neq 0$ , on a deux cas : soit  $m > 0$  et dans ce cas  $\bar{X}_n > 0$  *apcr* donc  $\mathbf{P}(\bar{X}_n > 0) = 1$ , soit  $m < 0$  et dans ce cas  $\bar{X}_n < 0$  *apcr* donc  $\mathbf{P}(\bar{X}_n > 0) = 0$ .

**On conjecture** donc que :

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left( \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} > 0 \right) &= 1 \quad \text{si } \mathbf{E}(X_1) > 0 \\
 &= 0 \quad \text{si } \mathbf{E}(X_1) < 0
 \end{aligned}$$

**Justification.** Les hypothèses pour la loi faible des grands nombres sont satisfaites donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbf{P} \left( \left| \bar{X}_n - m \right| \geq \varepsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On a alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbf{P} \left( \left| \bar{X}_n - m \right| < \varepsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

ou de manière équivalente :

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbf{P} \left( m - \varepsilon < \bar{X}_n < m + \varepsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$



On suppose tout d'abord  $m > 0$ . On prend  $\varepsilon = m/2$ , on a alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbf{P}\left(\frac{m}{2} < \bar{X}_n < \frac{3m}{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Or  $\frac{m}{2} < \bar{X}_n < \frac{3m}{2}$  implique  $\bar{X}_n > 0$ , on a donc l'inclusion entre évènements :

$$\left[\frac{m}{2} < \bar{X}_n < \frac{3m}{2}\right] \subset [X_n > 0]$$

Ainsi, en probabilités :

$$\mathbf{P}\left(\frac{m}{2} < \bar{X}_n < \frac{3m}{2}\right) \leq \mathbf{P}(X_n > 0) \leq 1$$

puis par le théorème d'encadrement :

$$\mathbf{P}(X_n > 0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

On suppose maintenant  $m < 0$ . On repart de la formulation :

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbf{P}\left(m - \varepsilon < \bar{X}_n < m + \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

On applique avec  $\varepsilon = -m/2 > 0$  :

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbf{P}\left(\frac{3m}{2} < \bar{X}_n < \frac{m}{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Si  $\bar{X}_n < \frac{m}{2}$ , alors  $\bar{X}_n \leq 0$ . On a donc l'inclusion entre évènements :

$$\left[\frac{3m}{2} < \bar{X}_n < \frac{m}{2}\right] \subset [X_n \leq 0]$$

Donc en probabilités :

$$\mathbf{P}\left(\frac{3m}{2} < \bar{X}_n < \frac{m}{2}\right) \leq \mathbf{P}(X_n \leq 0) \leq 1$$

donc par encadrement :

$$\mathbf{P}(X_n \leq 0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

puis finalement :

$$\mathbf{P}(X_n > 0) = 1 - \mathbf{P}(X_n \leq 0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

**Exercice 9** (Résultats sur le coefficient de corrélation) \*. Soient  $X$  et  $Y$  deux v.a.d. admettant un moment d'ordre 2 et telles que  $V(X) \neq 0$  et  $V(Y) \neq 0$ .

- (a) Pour un réel  $t$ , développer  $V(Y - tX)$  en utilisant  $t$ ,  $\sigma(X)$ ,  $\sigma(Y)$  et  $\rho(X, Y)$ .
- (b) En utilisant le fait que  $V(Y - tX) \geq 0$ , retrouver l'inégalité  $|\rho(X, Y)| \leq 1$ .
- (c) On suppose que  $|\rho(X, Y)| = 1$ . Démontrer qu'il existe un réel  $a$  tel que  $V(Y - aX) = 0$  et interpréter ce résultat.

Réponse.

- (a) On utilise les propriétés de la covariance :

$$\begin{aligned} V(Y - tX) &= \text{Cov}(Y - tX, Y - tX) = \text{Cov}(Y, Y) - 2t\text{Cov}(Y, X) + t^2\text{Cov}(X, X) \\ &= V(Y) - 2t\text{Cov}(X, Y) + t^2\text{Cov}(X, X) \\ &= \sigma(Y)^2 - 2t\rho(X, Y)\sigma(X)\sigma(Y) + t^2\sigma(X)^2 \end{aligned}$$

- (b) On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \sigma(Y)^2 - 2t\rho(X, Y)\sigma(X)\sigma(Y) + t^2\sigma(X)^2 \geq 0$$

L'équation  $\sigma(Y)^2 - 2t\rho(X, Y)\sigma(X)\sigma(Y) + t^2\sigma(X)^2 = 0$  est alors une équation du second degré (car  $\sigma(X) \neq 0$ ) et elle ne possède pas deux racines distinctes, sinon le polynôme

$$P(t) = \sigma(Y)^2 - 2t\rho(X, Y)\sigma(X)\sigma(Y) + t^2\sigma(X)^2$$

changerait de signe sur  $\mathbb{R}$ . Le discriminant  $\Delta$  de cette équation vérifie donc  $\Delta \leq 0$ . Or :

$$\Delta = 4\rho(X, Y)^2\sigma(X)^2\sigma(Y)^2 - 4\sigma(X)^2\sigma(Y)^2 = 4\sigma(X)^2\sigma(Y)^2(\rho(X, Y)^2 - 1)$$

Comme  $4\sigma(X)^2\sigma(Y)^2 > 0$ , on en déduit que  $\rho(X, Y)^2 - 1 \leq 0$  donc  $\rho(X, Y)^2 \leq 1$  puis en prenant la racine carrée  $|\rho(X, Y)| \leq 1$ .

- (c) On suppose  $|\rho(X, Y)| = 1$ , on a alors  $\Delta = 0$  donc l'équation du second degré admet une racine (double)  $a$ . On a alors :

$$V(Y - aX) = \sigma(Y)^2 - 2a\rho(X, Y)\sigma(X)\sigma(Y) + a^2\sigma(X)^2 = 0$$

La variable aléatoire discrète  $Y - aX$  a une variance nulle, ceci signifie qu'il existe un réel  $b$  tel que  $Y - aX = b$  « presque sûrement » autrement dit  $P(Y - aX = b) = 1$ . On a alors  $Y = aX + b$  « presque sûrement ». On vient de démontrer que lorsque  $\rho(X, Y) = \pm 1$ ,  $Y$  est une fonction affine de  $X$  (sauf sur un ensemble de probabilité nulle).