TD 28 : Variables aléatoires discrètes (compléments)

Indépendance et covariance

Exercice 1 *(Minimum de deux vad indépendantes).* Trois personnes A_1, A_2, A_3 entrent en même temps dans une banque qui ne comporte que deux guichets ; A_1 et A_2 sont servies immédiatement tandis que A_3 doit attendre qu'un guichet se libère pour être servie. On suppose que le temps nécessaire pour servir le client A_i ($i \in [\![1,3]\!]$) est une variable aléatoire X_i suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On suppose que les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 sont indépendantes. On note T la variable aléatoire égale au temps d'attente de A_3 avant de pouvoir être servie et Z le temps écoulé entre l'arrivée de A_3 et son départ.

(a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité de l'évènement $[T > k]$. En déduire la loi de T.
(b) Déterminer l'espérance et la variance de T.
(c) Déterminer l'espérance de Z.

Exercice 2 *(Décorrellées mais pas indépendantes).* On considère une vad X telle que $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et $\mathbf{P}(X = -1) = \mathbf{P}(X = 0) = \mathbf{P}(X = 1)$ et on pose $Y = X^2$. Démontrer que X et Y ne sont pas indépendantes. Calculer $\mathbf{Cov}(X, Y)$.

Exercice 3. On considère un réel a ainsi que deux vad X et Y telles que $X(\Omega) = \mathbb{N}$, $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et :

$$\forall k, n \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}(X = n, Y = k) = \frac{a}{n!2^{k+1}}$$

Déterminer a ainsi que les lois marginales X et Y. Les vad X et Y sont-elle indépendantes ?

Exercice 4 *(Oral CCP, PC, 2016, Exercice secondaire).* On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est une vad avec $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, $p \in]0,1[$ et les X_n sont indépendantes. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = X_n \times X_{n+1}$.

(1) Déterminer la loi de Y_n, son espérance et sa variance.
(2) Les vad Y_i et Y_j sont-elles indépendantes ?

Couples et loi conditionnelles

Exercice 5. On dispose d'une pièce de monnaie donnant pile avec la probabilité p et face avec la probabilité $q = 1 - p$ (avec $p \in]0,1[$). On lance cette pièce, les lancers étant indépendants les uns des autres, et on note N le nombre aléatoire de lancers nécessaires à la première apparition de pile (on pose $N = -1$ si pile n'apparait jamais). Quand pile apparait au bout de n lancers, on effectue une série de n lancers avec cette même pièce et on note X le nombre de pile obtenus au cours de cette série.

(a) Quelle est la loi de N ? Déterminer la loi du couple (N, X).
(b) Calculer $\mathbf{P}(X = 0)$ et $\mathbf{P}(X = 1)$.
(c) Pour tout entier naturel k non nul, exprimer $\mathbf{P}(X = k)$ sous forme d'une série.
(d) Calculer la somme de cette série. *On rappelle que* $\displaystyle\sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} x^{k-r} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$ *pour* $|x| < 1$.
(e) Déterminer l'espérance de X. Pourquoi ce résultat est-il raisonnable ?

Séries génératrices

Exercice 6. Soient X et Y des vad indépendantes qui suivent une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

(a) Déterminer la série génératrice de X et $3Y$. En déduire la série génératrice de $Z = X + 3Y$.
(b) Les vad X et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 7 *(Oral Centrale, PC, 2017)*. On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{B}(p)$. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

(1) Donner la loi de S_n.

(2) Dans quelle mesure peut-on dire que S_n/n est proche de p ?

Soit $t \in \mathbb{N}$. On lui associe la variable aléatoire

$$N_t = \operatorname{card}\left\{k \in \mathbb{N}^* \mid S_k \leqslant t\right\}$$

On remarque alors l'égalité $[N_t = k] = [S_k = t] \cap [S_{k+1} > t]$.

(3) Déterminer la loi de N_t.

(4) Déterminer la fonction génératrice de N_t.

Exercices plus théoriques

Exercice 8 *. On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de vad à valeurs réelles, mutuellement indépendantes et de même loi, admettant toutes un moment d'ordre 2. On suppose que $\mathbf{E}(X_1) \neq 0$. Déterminer :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} > 0\right)$$

Exercice 9 *(Résultats sur le coefficient de corrélation)* *. Soient X et Y deux vad admettant un moment d'ordre 2 et telles que $\mathbf{V}(X) \neq 0$ et $\mathbf{V}(Y) \neq 0$.

(a) Pour un réel t, développer $\mathbf{V}(Y - tX)$ en utilisant t, $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$ et $\rho(X, Y)$.

(b) En utilisant le fait que $\mathbf{V}(Y - tX) \geqslant 0$, retrouver l'inégalité $|\rho(X, Y)| \leqslant 1$.

(c) On suppose que $|\rho(X, Y)| = 1$. Démontrer qu'il existe un réel a tel que $\mathbf{V}(Y - aX) = 0$ et interpréter ce résultat.