



TD 29 : Révisions (2) Programme de première année

Nombres complexes, polynômes

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Donner, en justifiant, les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $z^n = 1$.
- En déduire les solutions dans \mathbb{C} de l'équation

$$(z-1)^n = (z+1)^n$$

puis démontrer que ces solutions sont des imaginaires purs.

Réponse.

- Il faut connaître l'expression des solutions de l'équation $z^n = 1$, ce sont les $z = e^{2ik\pi/n}$ avec $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Pour le justifier (ou le retrouver), on cherche z sous forme exponentielle $z = re^{i\theta}$ avec $r \geq 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$z^n = 1 \iff r^n e^{in\theta} = e^{i0}$$

Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont le même module et leurs arguments sont égaux à 2π près, donc :

$$\begin{aligned} z^n = 1 &\iff r^n = 1 \text{ et } n\theta \equiv 0 \pmod{2\pi} \\ &\iff r^n = 1 \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z}, n\theta = 2k\pi \end{aligned}$$

Comme r est positif, $r^n = 1$ est équivalent à $r = 1$. Ainsi :

$$\begin{aligned} z^n = 1 &\iff r = 1 \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{2k\pi}{n} \\ &\iff z = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right), k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

On voit qu'il suffit de considérer $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ car les autres valeurs de θ différeront d'un multiple de 2π et le nombre complexe obtenu sera le même. Pour rédiger les choses plus précisément, on part de $k \in \mathbb{Z}$, on réalise la division euclidienne de k par n notée $k = qn + p$ avec $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, alors :

$$\frac{2k\pi}{n} = \frac{2(qn+p)\pi}{n} = \frac{2p\pi}{n} + 2q\pi \equiv \frac{2p\pi}{n} \pmod{2\pi}$$

donc :

$$z = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) = \exp\left(\frac{2ip\pi}{n}\right), p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$$

- On note que $z = 1$ n'est pas solution de cette question. On considère $z \neq 1$:

$$\begin{aligned} (z-1)^n &= (z+1)^n \iff \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1 \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \frac{z+1}{z-1} = \omega, \omega = e^{2ik\pi/n} \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, z(\omega-1) = \omega+1 \end{aligned}$$

Le cas $\omega = 1$ donne $0 = 2$ ce qui est impossible. Ainsi, le cas $\omega = 1$ est exclu, autrement dit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et :

$$\begin{aligned}(z-1)^n &= (z+1)^n \iff \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, z = \frac{\omega+1}{\omega-1} \\ &\iff \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, z = \frac{e^{2ik\pi/n} + 1}{e^{2ik\pi/n} - 1}\end{aligned}$$

On obtient $n-1$ solutions ce qui est normal puisque l'équation $(z+1)^n - (z-1)^n = 0$ est polynomiale de degré $n-1$ (si on développe avec les formule du binôme, on constate que les termes z^n se simplifient). On propose deux méthodes pour montrer que ces solutions sont imaginaires pures.

Méthode 1, on utilise la factorisation par l'angle moitié. Les solutions s'écrivent :

$$z = \frac{e^{ik\pi/n}}{e^{ik\pi/n}} \cdot \frac{e^{ik\pi/n} + e^{-ik\pi/n}}{e^{ik\pi/n} - e^{-ik\pi/n}} = \frac{2 \cos(k\pi/n)}{2i \sin(k\pi/n)} = -i \frac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)} \in i\mathbb{R}$$

Méthode 2, plus géométrique. On part de $(z+1)^n = (z-1)^n$. On prend le module, on obtient $|z+1|^n = |z-1|^n$. Comme $|z+1|$ et $|z-1|$ sont positifs, on en déduit que $|z+1| = |z-1|$. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère M d'affixe z , A d'affixe -1 et B d'affixe 1 . Alors $|z-1| = MB$ et $|z+1| = MA$ donc $MA = MB$. Ainsi, M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$ qui est l'axe des ordonnées, donc z est imaginaire pur.

Exercice 2.

- Déterminer les racines complexes du polynôme $P = X^3 - 1$. En déduire la factorisation de P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.
- Faire de même avec le polynôme $Q = X^4 + 1$.

Réponse.

- Les racines de P sont les racines troisièmes de l'unité dans \mathbb{C} , c'est à dire $1, j$ et \bar{j} avec $j = e^{2i\pi/3}$. La factorisation de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ est donc :

$$P = (X-1)(X-j)(X-\bar{j})$$

Pour obtenir la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$, on développe les produits concernant les racines complexes conjuguées :

$$P = (X-1) \left(X^2 - (j+\bar{j})X + j\bar{j} \right)$$

Or $j\bar{j} = |j|^2 = 1$ et $j+\bar{j} = 2\operatorname{Re}(j) = -1$ donc :

$$P = (X-1)(X^2 + X + 1)$$

Rappel : les polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ sont uniquement les polynômes de degré 1. Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 ainsi que les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

- On cherche les racines de Q dans \mathbb{C} sous la forme $z = re^{i\theta}$ avec $r \geq 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$Q(z) = 0 \iff z^4 = -1 \iff r^4 e^{4i\theta} = e^{i\pi}$$

Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont le même modules et leurs arguments sont égaux à 2π près. Ainsi :

$$Q(z) = 0 \iff r^4 = 1 \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z}, 4\theta = \pi + 2k\pi$$

Comme r est positif, $r^4 = 1$ est équivalent à $r = 1$ donc :

$$Q(z) = 0 \iff r = 1 \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{(2k+1)\pi}{4}$$

On trouve donc que les racines de Q sont $e^{i\pi/4}$, $e^{3i\pi/4}$ ainsi que leurs conjugués. Factorisation de Q en produits d'irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$:

$$Q = (X - e^{i\pi/4})(X - e^{3i\pi/4})(X - e^{-i\pi/4})(X - e^{-3i\pi/4})$$

Pour obtenir la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$, on développe les termes qui concernent les racines conjuguées :

$$\begin{aligned} Q &= (X^2 - 2\operatorname{Re}(e^{i\pi/4})X + |e^{i\pi/4}|^2)(X^2 - 2\operatorname{Re}(e^{3i\pi/4})X + |e^{3i\pi/4}|^2) \\ &= (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1) \end{aligned}$$

Espaces vectoriels

Exercice 3. On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

- (a) Démontrer que $\operatorname{Ker}(f^2) \oplus \operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{id}) = \mathbb{R}^3$.
- (b) Déterminer un vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $v \in \operatorname{Ker}(f^2)$ et $v \notin \operatorname{Ker} f$.
- (c) Démontrer que la matrice A est semblable à

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Réponse.

- (a) On trouve $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, cette matrice est de rang 1 donc d'après le théorème du rang $\dim \operatorname{Ker} f^2 = \dim \operatorname{Ker} A^2 = 2$. Pour $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on trouve ensuite :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} f^2 &\iff A^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff x + y - z = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit que (u_1, u_2) est une famille génératrice de $\operatorname{Ker}(f^2)$ avec $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Comme u_1 et u_2 ne sont pas proportionnels, (u_1, u_2) est une base de $\operatorname{Ker} f^2$. On trouve ensuite de la manière habituelle :

$$\operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{id}) = \operatorname{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

donc (u_3) est une base de $\operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{id})$ avec $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On considère \mathcal{C} la base canonique de \mathbb{R}^3 , on a :

$$\det_{\mathcal{C}}(u_1, u_2, u_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

On en déduit que (u_1, u_2, u_3) est une base de \mathbb{R}^3 . D'après le théorème de concaténation des bases, $\operatorname{Ker}(f^2)$ et $\operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{id})$ sont des sous-espaces supplémentaires de \mathbb{R}^3 .

(b) On trouve de la manière habituelle :

$$\text{Ker } f = \text{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient puisqu'il appartient à $\text{Ker}(f^2)$ mais pas à $\text{Ker}(f)$.

(c) On pose ensuite :

$$e_1 = Av = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = v$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tout d'abord :

$$\det_{\mathcal{E}}(e_1, e_2, e_3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

On en déduit que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 . Par construction :

$$f(e_1) = f^2(v) = 0 \quad \text{car } v \in \text{Ker}(f^2)$$

$$f(e_2) = f(v) = e_1$$

$$f(e_3) = 2e_3 \quad \text{car } e_3 \in \text{Ker}(f - 2\text{id})$$

On a donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = B$. Par définition, $A = \text{Mat}_{\mathcal{E}}(f)$. Ainsi les matrices A et B sont semblables car elles représentent le même endomorphisme f dans deux bases.

Suites, séries

Exercice 4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto x^5 + nx - 1$.

(a) Démontrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution. On la notera u_n .

(b) Démontrer que la suite (u_n) est bornée. En déduire un équivalent de u_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

(c) Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

(d) Déterminer la nature de la série $\sum (-1)^n u_n$.

Réponse.

(a) La fonction f_n est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'_n(x) = 5x^4 + n > 0$ (on considère $n \in \mathbb{N}^*$). La fonction f_n est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} , de plus :

$$f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$$

Ainsi, f_n réalise une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} et en particulier il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}$ tel que $f_n(u_n) = 0$.

(b) La fonction f_n est continue sur $[0, 1]$ et $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = n > 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction f_n s'annule sur l'intervalle $[0, 1]$. Comme f_n ne s'annule qu'en u_n , on a $u_n \in [0, 1]$ et ceci montre que la suite (u_n) est bornée. On a $u_n^5 + nu_n = 1$ donc :

$$u_n = \frac{1 - u_n^5}{n}$$

Comme le numérateur est borné, on a :

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi $1 - u_n^5 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

- (c) La série de Riemann $\sum 1/n$ diverge donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ diverge.
 (d) **Méthode 1**, on trouve un développement asymptotique de u_n . On a :

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} u_n^5$$

Or $u_n^5 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^5}$ autrement dit $u_n^5 = \frac{1}{n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)$ et ainsi :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right) \\ &= \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^6}\right) \\ (-1)^n u_n &= \frac{(-1)^n}{n} + o\left(\frac{1}{n^6}\right) \end{aligned}$$

On montre de la manière habituelle avec le théorème des séries alternées que la série $\sum (-1)^n/n$ converge. Par ailleurs, par comparaison de séries à termes positifs, le terme en $O(1/n^6)$ est le terme général d'une série absolument convergente donc convergente. Ainsi, $\sum (-1)^n u_n$ converge comme somme de deux séries convergentes.

Méthode 2. On utilise directement le théorème des séries alternées sur $\sum (-1)^n u_n$:

- La série $\sum (-1)^n u_n$ est alternée car (u_n) est à valeurs positives ;
- Comme $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, on a $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- Pour $n \geq 1$:

$$f_{n+1}(u_n) = u_n^5 + (n+1)u_n - 1 = u_n^5 + nu_n - 1 + u_n = u_n = u_n \geq 0$$

La fonction f_{n+1} est strictement croissante et s'annule en u_{n+1} , on a donc $f_{n+1}(x) > 0$ pour $x > u_{n+1}$ et $f_{n+1}(x) < 0$ pour $x < u_{n+1}$. Or $f_{n+1}(u_n) \geq 0$, on a donc $u_n \geq u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc décroissante.

D'après le théorème des séries alternées, la série $\sum (-1)^n u_n$ converge.

Exercice 5.

- (a) Déterminer un équivalent de $\ln(n!)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
 (b) Déterminer un équivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
 (c) Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ où pour $n \geq 2$, $u_n = \frac{1}{\ln(n!)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Réponse.

- (a) On connaît la formule de Stirling :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a_n \quad \text{avec} \quad a_n = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Attention : rien ne permet d'affirmer directement que $\ln(n!) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(a_n)$. On va le démontrer :

$$\frac{\ln(n!)}{\ln(a_n)} - 1 = \frac{\ln(n!) - \ln(a_n)}{\ln(a_n)} = \frac{1}{\ln(a_n)} \ln\left(\frac{n!}{a_n}\right)$$

Comme $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n!$, on a :

$$\begin{aligned} a_n &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \\ \frac{n!}{a_n} &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \ln(a_n) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \\ \ln\left(\frac{n!}{a_n}\right) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

et ainsi :

$$\frac{\ln(n!)}{\ln(a_n)} - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Par conséquent, $\ln(n!) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(a_n)$. Or :

$$\begin{aligned} \ln(a_n) &= \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \ln(n) + n \ln(n) - n = n \ln(n) + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n \ln n) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln(n) \end{aligned}$$

et on a donc :

$$\ln(n!) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln(n)$$

(b) Classiquement

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$$

On le démontre habituellement par encadrement par intégrales. Voici une autre méthode, on pose :

$$b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2(n+1)^2} + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= \underset{n \rightarrow +\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

La série de Riemann $\sum 1/n^2$ converge, donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum (b_{n+1} - b_n)$ converge absolument donc converge. D'après le cours, la suite (b_n) est donc convergente, donc il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} &= \ln(n) + b_n = \ln(n) + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(\ln n) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n) \end{aligned}$$

(c) On a donc :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n \ln(n)} = \frac{1}{n}$$

La série de Riemann $\sum 1/n$ diverge donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ diverge.