Question. Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ de classe C^1 telle que $f'(x)>0$ pour $x\in\mathbb{R}^+$ et $f(0)=0$. On note $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ la bijection réciproque de f.

(a) Démontrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^+,\ \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{f(x)} g(t)\,\mathrm{d}t = xf(x)$.

(b) En déduire l'inégalité de Young : $\forall x\in\mathbb{R}^+,\ \forall y\in\mathbb{R}^+,\ \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{y} g(t)\,\mathrm{d}t \geqslant xy$.

(c) Dans quel(s) cas y a-t-il égalité ?

Réponse.

(a) On définit la fonction :

$$h: x\in\mathbb{R}^+\mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{f(x)} g(t)\,\mathrm{d}t - xf(x)$$

Pour simplifier l'écriture, on considère F, primitive de f sur $\mathbb{R}^+$ qui s'annule en 0 et G, primitive de g sur $\mathbb{R}^+$ qui s'annule en 0. Ces deux primitives existent car f est continue et g est continue comme réciproque d'une fonction continue. On a :

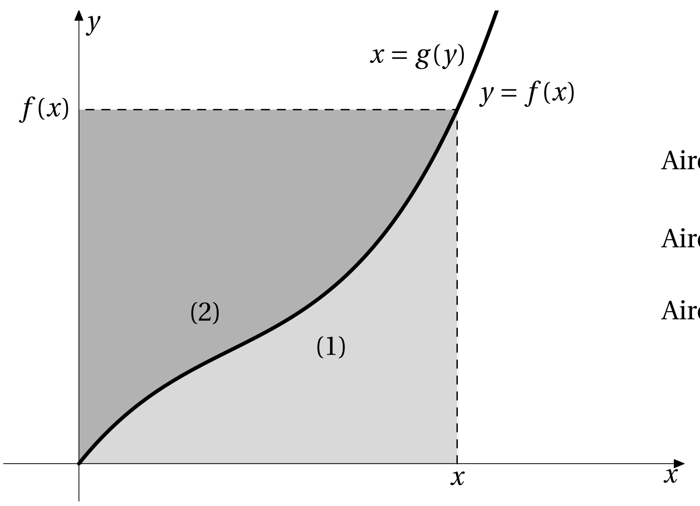
$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}^+,\ h(x) &= F(x)-F(0)+G(f(x))-G(0)-xf(x)\\ &= F(x)+G(f(x))-xf(x)\end{aligned}$$

On en déduit que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}^+,\ h'(x) &= F'(x)+f'(x)G'(f(x))-xf'(x)-f(x)\\ &= f(x)+f'(x)g(f(x))-xf'(x)-f(x)\\ &= 0 \quad \text{car} \quad g(f(x))=x\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction h est constante sur $\mathbb{R}^+$. Comme de plus $h(0)=0$, on en déduit que h est nulle sur $\mathbb{R}^+$, on a donc :

$$\forall x\in\mathbb{R}^+,\ \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{f(x)} g(t)\,\mathrm{d}t - xf(x) = 0$$



$\text{Aire}(1) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$

$\text{Aire}(2) = \displaystyle\int_0^{f(x)} g(t)\,\mathrm{d}t$

$\text{Aire}(1)+\text{Aire}(2) = x\times f(x)$

(b) Considérons maintenant $x\in\mathbb{R}^+$ fixé, on définit la fonction :

$$u: y\in\mathbb{R}^+\mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{y} g(t)\,\mathrm{d}t - xy = F(x)+G(y)-xy$$

(en reprenant les notations précédentes). La fonction u est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et :

$$\forall y\in\mathbb{R}^+,\ u'(y) = g(y)-x$$

La fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ (bijection réciproque d'une fonction strictement croissante), donc :

$$u'(y) = 0 \iff g(y) = x \iff y = g^{-1}(x)$$
$$u'(y) > 0 \iff g(y) > x \iff y > g^{-1}(x)$$

On a donc pour u le tableau de variations suivant :

y	0		$g^{-1}(x)$		$+\infty$
$u'(y)$		$(-)$	0	$(+)$	
$u(y)$	?	$\searrow$	$u(g^{-1}(x))$	$\nearrow$	?

Ainsi, u admet un minimum en $y = g^{-1}(x)$. On a de plus :

$$u(g^{-1}(x)) = u(f(x)) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} g(t)\,\mathrm{d}t - xf(x) = 0$$

On en déduit que u est positive sur $\mathbb{R}^+$.

(c) L'étude précédente montre que le minimum obtenu est strict. On a donc égalité si, et seulement si, $y = g^{-1}(x)$ autrement dit lorsque $y = f(x)$ ou, de manière équivalente, lorsque $x = g(y)$.