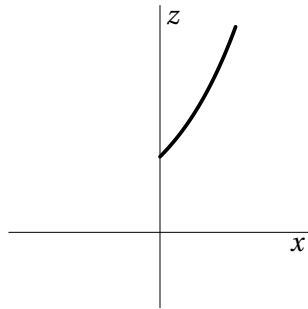
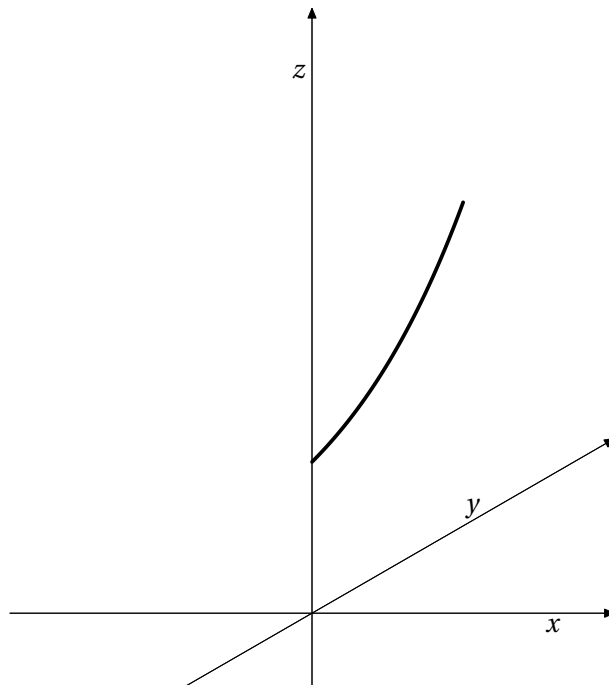


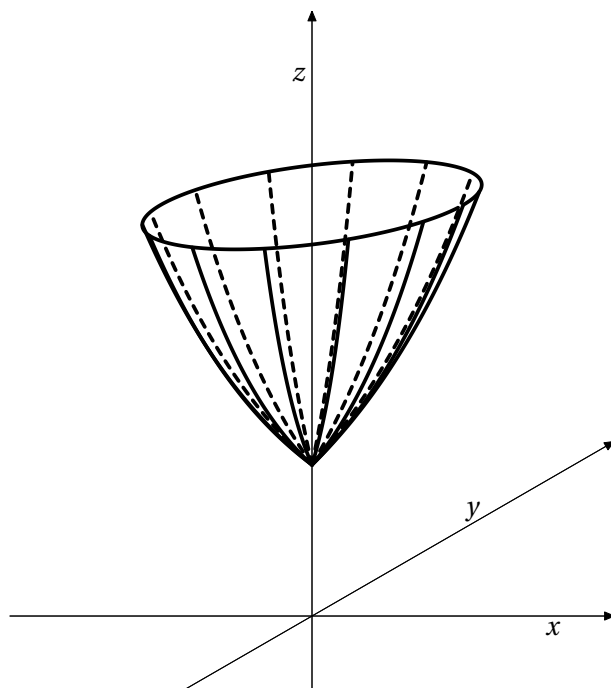
**Question.** On considère la fonction exponentielle sur l'intervalle  $[0, 1]$ , on trace sa courbe représentative  $z = \exp(x)$  :



On imagine que ceci se trouve dans l'espace en dimension 3, on complète la représentation en ajoutant l'axe  $y$  :

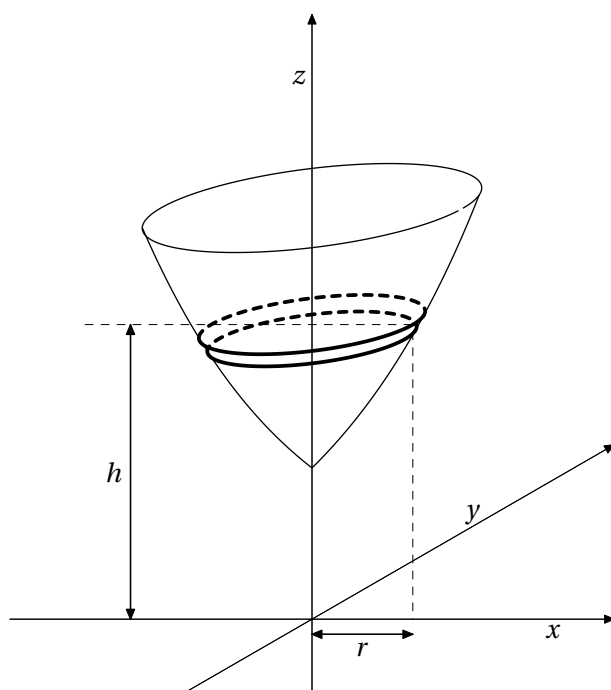


On fait tourner la courbe obtenue autour de l'axe  $z$  :



La surface obtenue ressemble à un verre (il manque le pied). Saurez-vous trouver son volume?

*Réponse.* Notons  $V$  ce verre et  $\mathcal{V}$  son volume. Le verre est entièrement compris entre les plans d'équation  $z = 1$  et  $z = e$ . On se place à une hauteur  $h \in [1, e]$  et on considère une tranche horizontale élémentaire d'épaisseur  $dh$  dans la surface :



Cette tranche peut être considérée comme un cylindre dont la hauteur est  $dh$  et le rayon est  $r$ , rayon du verre à la hauteur  $h$ . Par définition du verre,  $e^r = h$  donc  $r = \ln(h)$ . Le volume (élémentaire) de cette tranche est alors l'aire du disque multipliée par la hauteur c'est à dire  $\pi r^2 dh$  ou encore  $\pi \ln(h)^2 dh$ . Pour obtenir le volume total  $\mathcal{V}$  du verre, on ajoute ces volumes élémentaires :

$$\mathcal{V} = \int_1^e \pi \ln(h)^2 dh$$

On commence par réaliser le changement de variable de classe  $C^1$  donné par  $x = \ln(h)$ ,  $h = e^x$ , donc  $dh = e^x dx$  :

$$\mathcal{V} = \int_0^1 \pi x^2 e^x dx$$

On obtient le résultat après deux intégrations par parties :  $\mathcal{V} = \pi(e^1 - 2)$ .

**Autre rédaction possible**, avec sensiblement la même méthode. On sait que :

$$\mathcal{V} = \iiint_V dx dy dz$$

On va utiliser les coordonnées cylindriques pour calculer cette intégrale triple :

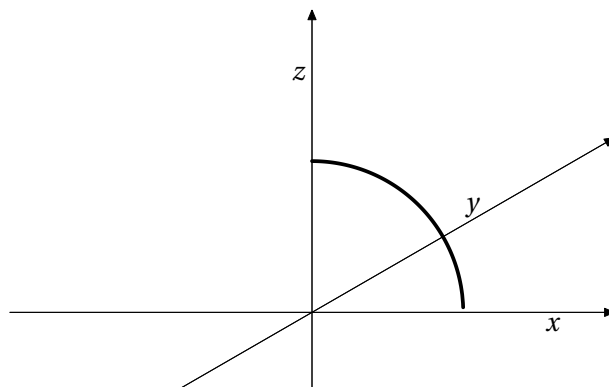
$$\mathcal{V} = \iiint_V r dr d\theta dz$$

On a noté que  $z$  varie de 1 à  $e$ ,  $\theta$  va varier de 0 à  $2\pi$  et, à  $z$  fixé,  $r$  varie de 0 à  $\ln(z)$ . Ainsi :

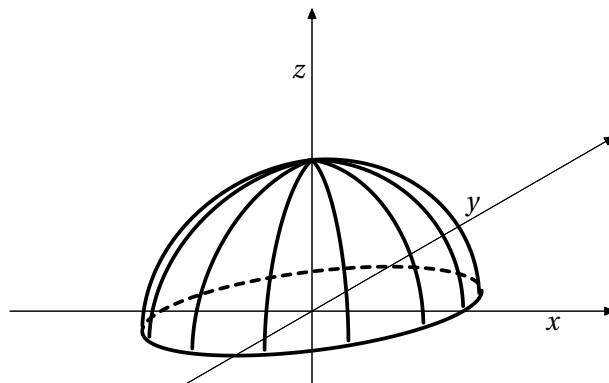
$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \int_{z=1}^e \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\ln(z)} r dr d\theta dz \\ &= \int_{z=1}^e \left( \int_{r=0}^{\ln(z)} \underbrace{\left( \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \right)}_{=2\pi} r dr \right) dz \\ &= 2\pi \int_{z=1}^e \left( \int_{r=0}^{\ln(z)} r dr \right) dz \\ &= 2\pi \int_{z=1}^e \frac{\ln(z)^2}{2} dz \end{aligned}$$

et on obtient le même résultat.

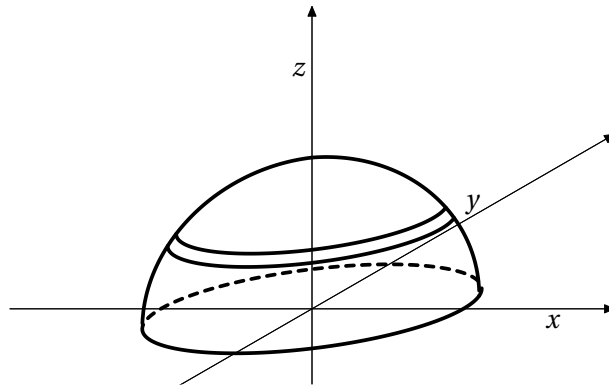
**Sur le même principe**, on peut retrouver le volume d'une sphère. On part de la courbe  $z = \sqrt{1-x^2}$  qui donne un quart de cercle dans le plan  $(Oxz)$  :



et on la fait tourner autour de l'axe  $(Oz)$  ce qui donne une demi-sphère :



On considère une hauteur  $h \in [0, 1]$  et la tranche horizontale d'épaisseur élémentaire  $dh$  située à cette hauteur :



Cette tranche peut être considérée comme un cylindre dont la base est un disque de rayon  $r$  tel que  $\sqrt{1 - r^2} = h$  et de hauteur  $dh$ . Son volume est donc :

$$\pi r^2 dh = \pi(1 - h^2)dh$$

On obtient le volume de la demi-sphère en ajoutant ces volumes élémentaires :

$$\int_0^1 \pi(1 - h^2)dh = \frac{2\pi}{3}$$

Pour une sphère entière, de rayon 1, on obtient alors comme volume  $4\pi/3$ . Pour une sphère complète de rayon  $R$ , on obtient par homogénéité que le volume est  $4\pi R^3/3$ .