



TD 25 : Calcul différentiel

Continuité et classe C^1

Exercice 1. Étudier si les fonctions f et g suivantes sont de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 2. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 en posant :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démontrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Démontrer que f admet des dérivées partielles par rapport à x et y en $(0, 0)$. Démontrer que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Exercice 3 (Oral Mines-Ponts, PC, 2015). Soit f définie par $f : \begin{cases} (x, y) \neq (0, 0) \mapsto \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \\ (0, 0) \mapsto 0. \end{cases}$

- (1) Montrer que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .
- (2) Calculer (sous réserve d'existence) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$; f est-elle de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 ?

Recherche d'extrémums

Exercice 4 (Oral CCP, PC, 2009). Soient $D = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, 1 - x - y \geq 0\}$ et

$$f : (x, y) \in D \mapsto xy(1 - x - y)$$

Montrer que f admet un maximum sur D que l'on déterminera.

Exercice 5 (Oral CCP, PC, 2019) *. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = \operatorname{ch}(2x) - \cos(2y)$. On considère les ensembles $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

- (a) Pour tout t positif, montrer les inégalités $\sin(t) \leq t$ et $\operatorname{sh}(t) \geq t$.
- (b) Montrer que f admet un minimum nul sur \mathbb{R}^2 .
- (c) Montrer que D est fermé et borné. En déduire que f admet un maximum sur D .
- (d) Montrer que D' est un ouvert et déterminer les points critiques de f dans D' .
- (e) En déduire qu'il existe $t_0 \in [0, \pi/2]$ tel que le maximum de f sur D soit égal à $f(\cos(t_0), \sin(t_0))$.
- (f) Étudier les variations sur $[0, \pi/2]$ de la fonction $g : \theta \mapsto f(\cos(\theta), \sin(\theta))$. Conclure.

Exercice 6 (Oral Polytechnique, PC, 2009) *. Soit

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2 - y^2) \exp(-(x^2 + y^2))$$

Montrer que f atteint un maximum et un minimum sur \mathbb{R}^2 et les déterminer.

Applications géométriques

Exercice 7 (Oral CCP, PC, 2018, Exercice secondaire). Soit un point $M(a, b, c)$ sur la surface S d'équation $z^3 = xy$. Déterminer le plan tangent à S en M .

Indications

Ex 6. En utilisant les coordonnées polaires, établir que $|f(x, y)| \leq r^2 e^{-r^2}$ puis établir que $r^2 e^{-r^2} \leq e^{-1}$. Ceci permet de conclure à partir du moment où on a déterminé les points critiques de f .

Ex 7. Se contenter de répondre à la question pour les points de S qui sont réguliers.