Variables aléatoires discrètes (compléments)

◇ Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$ est un espace probabilisé.

◇ On peut considérer que l'un des buts de ce chapitre est de répondre à la question : « à quoi est égale la variance d'une somme ? » Pour répondre à cette question, on doit tout d'abord parler de couples de deux variables aléatoires.

◇ Les notions de couples de variables aléatoires et de variables aléatoires indépendantes ont déjà été vus en première année dans le cas des variables aléatoires finies, il est donc judicieux de commencer par revoir ce cours.

I. Couples de vad

Notation : Si X et Y sont deux vad, l'évènement $[X = x] \cap [Y = y]$ s'écrit également « $X = x$ et $Y = y$ » ou encore souvent $X = x, Y = y$. $\square$

Définition 1 – Couple de vad

Si X et Y sont deux vad, on peut définir une application notée (X,Y) par :

$$(X,Y): \begin{array}{ccc} \Omega & \to & X(\Omega)\times Y(\Omega) \\ \omega & \mapsto & (X(\omega),Y(\omega)) \end{array}$$

L'image de Ω par cette application est incluse dans $X(\Omega)\times Y(\Omega)$ qui est fini ou dénombrable (produit de deux ensembles finis ou dénombrables). Ainsi (X,Y) est également une vad. On dit que (X,Y) est un couple de variables aléatoires.

- *Donner la loi du couple (on dit aussi la loi conjointe de X et Y) c'est déterminer l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X, l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y et, pour tout $x\in X(\Omega)$ et tout $y\in Y(\Omega)$, déterminer la probabilité $\mathbf{P}(X=x,Y=y)$.*
- *Donner les lois marginales du couples (X,Y), c'est simplement donner la loi de X et la loi de Y.*
- *Si $y\in Y(\Omega)$, donner la loi conditionnelle de X sachant l'évènement $[Y=y]$ c'est déterminer, pour tout $x\in X(\Omega)$, la probabilité $\mathbf{P}(X=x|Y=y)$.*
- *De manière analogue, on peut déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X=x]$.*

Exemple. On dispose de $n+1$ urnes numérotées de 0 à n. L'urne numéro i contient i boules noires et une boule blanche. On choisit une urne au hasard, on note X son numéro puis on réalise un tirage dans cette urne et on pose $Y=1$ si la boule tirée est blanche et $Y=0$ sinon.
Ensemble des valeurs prises par X. La vad X peut prendre toutes les valeurs de 0 à n donc $X(\Omega)=[\![0,n]\!]$.
Ensemble des valeurs prises par Y. La vad Y peut prendre les valeurs 0 et 1 donc $Y(\Omega=\{0,1\}$. On remarque que lorsque $X=0$, alors Y ne peut pas prendre la valeur 0 (car l'urne 0 ne contient pas de boule noire) mais de manière générale, Y peut prendre les valeurs 0 et 1.
La loi de X. C'est d'après l'énoncé la loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$ c'est à dire :

$$\forall i\in[\![0,n]\!],\ \mathbf{P}(X=i)=\frac{1}{n+1}$$

La loi de Y. C'est nécessairement une loi de Bernoulli car $Y(\Omega)=\{0,1\}$ mais on n'en sait pas plus pour l'instant.
Une loi conditionnelle. Si on fait l'hypothèse que l'urne choisie est la i-ème, alors elle contient une boule blanche sur un total de $i+1$ boules, la probabilité d'avoir $Y=1$ dans ce cas est donc $1/(i+1)$ autrement dit :

$$\mathbf{P}(Y=1|X=i)=\frac{1}{i+1}$$
$$\mathbf{P}(Y=0|X=i)=\frac{i}{i+1}$$

On vient donc de déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X=i]$.
La loi du couple. Pour $i\in[\![0,n]\!]$, on utilise la formule des probabilités composées :

$$\mathbf{P}(X=i,Y=1)=\mathbf{P}(X=i)\mathbf{P}_{X=i}(Y=1)=\frac{1}{n+1}\times\frac{1}{i+1}$$
$$\mathbf{P}(X=i,Y=0)=\mathbf{P}(X=i)\mathbf{P}_{X=i}(Y=0)=\frac{1}{n+1}\times\frac{i}{i+1}$$

On peut alors obtenir la loi de Y. En effet, $[X = i]$ avec $i \in [\![0, n]\!]$ est un système complet d'évènement, on utilise alors la formule des probabilités totales :

$$\mathbf{P}(Y=1) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}(X=i, Y=1) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{i+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}$$
$$\mathbf{P}(Y=0) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}(X=i, Y=0) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+1} \times \frac{i}{i+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{i+1}$$

On peut noter que $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ en posant :

$$p = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1}$$

Il n'y a pas de formule plus simple pour exprimer p. □

Remarques.

- Cet exemple montre que connaitre la loi du couple (X, Y) apporte plus d'information que connaitre séparément les lois de X et Y. En effet, dans cet exemple, X suit une loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$, Y suit une loi de Bernoulli, mais si on se contente seulement de ces deux informations, on ne peut pas se rendre compte que l'évènement $X = 0, Y = 0$ est impossible.
- Cet exemple montre aussi que lorsque la loi du couple (X, Y) est connue, on peut retrouver les lois de X et Y avec la formule des probabilités totales. □

Exercice 1 *Une loi conditionnelle.* On reprend l'exemple précédent. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $Y = 1$.

Exercice 2 *Loi conjointe, lois marginales (1).* Le nombre de personnes se présentant à un bureau de poste est une variable aléatoire réelle N suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Une personne vient pour poster un envoi avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et pour une autre opération (retrait d'argent, gestion d'un compte,etc.) avec la probabilité $q = 1 - p$. On suppose que chaque personne n'effectue qu'une opération et qu'elles font ces opérations indépendamment les unes des autres. On note X le nombre de personnes qui viennent poster une lettre ou un colis et Y le nombre de personnes qui viennent pour une autre opération.

(a) Déterminer $N(\Omega)$, $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.
(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[N = n]$.
(c) En déduire la loi conjointe du couple (X, N).
(d) En déduire la loi de X et donner $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

Exercice 3 *Loi conjointe, lois marginales (2).* Une pièce amène *pile* avec la probabilité $p \in]0, 1[$. On lance indéfiniment cette pièce et on note X le rang d'apparition du premier *pile* et Y le rang où *pile* apparait pour la deuxième fois. Les différents tirages sont indépendants. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) et en déduire les lois marginales.