

Calcul différentiel

◇ Le but du chapitre est de définir les dérivées partielles ainsi que la notions de classe C^1 pour les fonctions de plusieurs variables. Les applications usuelles de ceci :

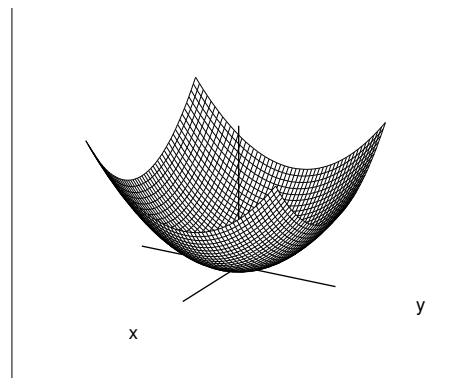
- La recherche d'extrémums : si f est de classe C^1 sur un intervalle ouvert U et si f admet un extrémum en $a \in U$ alors les dérivées partielles de f s'annulent en a .
- La résolution d'équations aux dérivées partielles, par exemple l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Remarque. Les résultats de ce chapitre s'appliquent à des fonctions de n variables. Pour simplifier, les énoncés sont données pour des fonctions de 2 variables, notées en général x et y et on fera des remarques sur les fonctions de 3 variables. \square

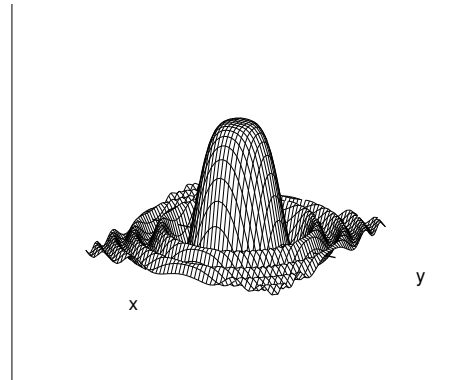
◇ Quelques représentations graphiques de fonctions de 2 variables. Si f est une fonction de 2 variables, on peut représenter graphiquement f dans l'espace en plaçant les points de coordonnées (x, y, z) avec $z = f(x, y)$. Cela donne une surface dans l'espace (de manière analogue, la représentation graphique d'une fonction f d'une seule variable est la courbe du plan constituée des points de coordonnées (x, y) avec $y = f(x)$). On donne ci-dessous quelques exemples de surface représentant des fonctions de 2 variables.

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$



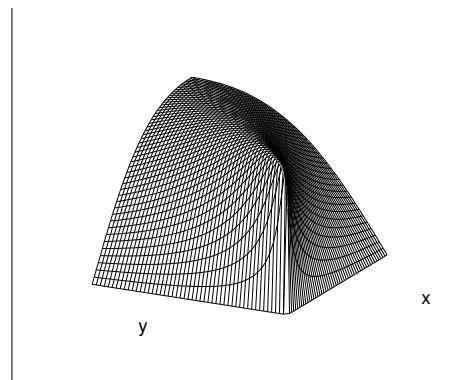
$$f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0)$$

$$= 1 \quad \text{sinon}$$



$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0)$$

$$= 0 \quad \text{sinon}$$



Notation : Dans la suite U sera un ouvert de \mathbb{R}^2 (ou \mathbb{R}^3 pour les fonctions de 3 variables). \square

Remarque. Nous aurons besoin dans ce chapitre de notions étudiées dans le cours de topologie, essentiellement ouvert, fermé et continuité pour une fonction de plusieurs variables. On utilisera aussi la norme usuelle $\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ (dans le cas de 3 variables $\|(x, y, z)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$). \square

I. Dérivées partielles et fonctions de classe C^1

Définition 1 – Dérivées partielles

Soient $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in U$. On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à x en (x_0, y_0) lorsque le taux d'accroissement (suivant la première variable) :

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

admet une limite finie lorsque $h \rightarrow 0$. Lorsque c'est le cas, on note :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

De même, on dit que f admet une dérivée partielle par rapport à y en (x_0, y_0) lorsque le taux d'accroissement (suivant la deuxième variable) :

$$\frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

admet une limite finie lorsque $h \rightarrow 0$ et lorsque c'est le cas on note :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Définition 2 – Fonction de classe C^1

On dit que $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur U lorsque :

- La fonction f admet des dérivées partielles par rapport à x et y en tout point $(x_0, y_0) \in U$;
- Les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur U .

On note $C^1(U, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies et de classe C^1 sur U et à valeurs dans \mathbb{R} .

Remarque. La notion de continuité pour une fonction de plusieurs variable a été vue dans le cours de topologie (illustrations du cours de topologie exercice 2 et TD 20 exercice 6). \square

Remarque. S'il y a une troisième variable z_0 , on est amené à définir la dérivée partielle par rapport à z :

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0 + h) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

sous réserve d'existence et f est de classe C^1 si, et seulement si, ses trois dérivées partielles sont définies et continues sur U . \square

Remarque. Comme d'habitude, on dispose de résultats concernant les opérations : dérivée par rapport à x ou y d'une somme, d'un produit, d'un quotient dont le dénominateur

ne s'annule pas. Il s'agit des formules usuelles et pour simplifier on ne les détaille pas ici. La dérivée d'une composée est plus délicate et fait l'objet d'un paragraphe ultérieur. Comme d'habitude une somme de fonctions de classe C^1 , un produit de fonctions de classe C^1 sont de classe C^1 . De même pour un quotient de fonctions de classe C^1 dont le dénominateur ne s'annule pas. \square

I. Dérivées partielles et fonctions de classe C^1

Exemples. Trois situations classiques.

- (1) La fonction f est définie avec une formule sans problème particulier. Par exemple :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \cos(xy + y^2) \end{aligned}$$

Cette fonction f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 comme composée de fonctions de classe C^1 et pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ les dérivées partielles de f en (x, y) s'obtiennent simplement en dérivant l'expression de $f(x, y)$ soit par rapport à x , soit par rapport à y (en supposant alors l'autre variable constante) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -y \sin(xy + y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -(x + 2y) \sin(xy + y^2)$$

- (2) La fonction f est définie avec un cas particulier, en général en $(0, 0)$. Par exemple :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \neq (0, 0) &\mapsto \frac{x}{x^2 + y^2} \\ (0, 0) &\mapsto 0 \end{aligned}$$

Ici la fonction f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 *privé de* $(0, 0)$ et pour $(x, y) \neq (0, 0)$ les dérivées partielles s'obtiennent en dérivant l'expression de $f(x, y)$ par rapport à x ou y en supposant l'autre variable constante :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

Pour l'étude en $(0, 0)$ on revient à la définition de dérivée partielle en formant des taux d'accroissement en $(0, 0)$. Suivant la première variable pour commencer :

$$\frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{h/h^2 - 0}{h} = \frac{1}{h^2} \xrightarrow{h \rightarrow 0} +\infty$$

Ce taux d'accroissement n'admet pas de limite finie lorsque $h \rightarrow 0$, donc f n'admet pas de dérivée partielle par rapport à x en $(0, 0)$. Suivant la deuxième variable maintenant :

$$\frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \frac{0}{h} = 0 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

Ce taux d'accroissement admet une limite finie lorsque $h \rightarrow 0$, donc f admet une dérivée partielle par rapport à y en $(0, 0)$ et :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

- (3) La fonction f est définie sans valeur particulière mais il y a malgré tout un problème en un point. Par exemple :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

La fonction $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est de classe C^1 et à valeurs dans \mathbb{R}^+ mais la fonction $\sqrt{\cdot}$ n'est de classe C^1 que sur \mathbb{R}^{+*} . Ainsi, f est de classe C^1 comme composée de fonctions de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 privé de $(0, 0)$. Pour $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

En $(0, 0)$ on revient à la définition de dérivée partielle en utilisant les taux d'accroissement. Tout d'abord par rapport à la première variable :

$$\frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{\sqrt{h^2} - 0}{h} = \frac{|h|}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 1 \quad \text{et} \quad \xrightarrow{h \rightarrow 0^-} -1$$

Ces deux limites différentes montrent que le taux d'accroissement n'admet pas de limite finie en $(0, 0)$ donc f n'admet pas de dérivée partielle par rapport à x en $(0, 0)$. On montre de même que f n'admet pas de dérivée partielle par rapport à y en $(0, 0)$. \square

Exercice 1 Premier exemple pour l'étude du caractère C^1 . On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 en posant :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) &= 0 \end{aligned}$$

- (a) Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
- (b) Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $(x, y) \neq (0, 0)$, calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.
- (c) Justifier que f possède des dérivées partielles par rapport à x et y en $(0, 0)$ et préciser leur valeur.

On dispose donc de deux nouvelles fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ définies sur \mathbb{R}^2 .

- (d) Justifier que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0, 0)$.
- (e) L'application f est-elle de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 tout entier?

I. Dérivées partielles et fonctions de classe C^1

Réponse :

- (a) La fonction f est définie avec un problème en $(0,0)$. La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions de classe C^1 dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
- (b) Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ les dérivées partielles se calculent directement (en dérivant par rapport à x à y fixé et inversement). Pour $(x, y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2x^4y}{(x^2 + y^2)^2}$$

- (c) Pour savoir si les dérivées partielles existent en $(0,0)$ on utilise des taux d'accroissement. Ici ils sont très simples (ils sont tous nuls) et en pratique c'est souvent le cas :

$$\frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$\frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

On en déduit que f admet des dérivées partielles par rapport à x et y en $(0,0)$ et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

- (d) On dispose alors de deux nouvelles fonctions définies sur \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \neq (0, 0) &\mapsto \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \\ (0, 0) &\mapsto 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \neq (0, 0) &\mapsto \frac{2x^4y}{(x^2 + y^2)^2} \\ (0, 0) &\mapsto 0 \end{aligned}$$

et il faut étudier la continuité en $(0,0)$ de ces deux fonctions. On utilise un passage en coordonnées polaires : on considère $(x, y) \neq (0,0)$ et on note

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \text{avec} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|_2 > 0, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

On a alors :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right| = \left| \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \right| = \frac{2|r^5 \cos \theta \sin^4 \theta|}{r^4} \leq 2r = 2 \|(x, y)\|_2 \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$$

Par encadrement, on en déduit :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0, 0)$. De même :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right| = \left| \frac{2x^4 y}{(x^2 + y^2)^2} \right| = \frac{2|r^5 \cos^4 \theta \sin \theta|}{r^4} \leq 2r = 2 \|(x, y)\|_2 \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$$

Par encadrement, on en déduit :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue en $(0, 0)$.

- (e) Les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (question a) et continues en $(0, 0)$ (question d) donc continues sur \mathbb{R}^2 . La fonction f est donc de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 2 Deuxième exemple pour l'étude du caractère C^1 . Déterminer si la fonction g définie sur \mathbb{R}^2 en posant

$$g(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0)$$

$$g(0, 0) = 0$$

est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

Réponse :

La fonction g est définie avec un problème en $(0, 0)$. La fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ comme quotient de fonctions de classe C^1 dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. De plus, pour $(x, y) \neq (0, 0)$ on obtient par le calcul :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{x^4 - x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Pour savoir si les dérivées partielles de g existent en $(0, 0)$ on utilise des taux d'accroissement :

$$\frac{g(h, 0) - g(0, 0)}{h} = 0 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$\frac{g(0, h) - g(0, 0)}{h} = 0 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

I. Dérivées partielles et fonctions de classe C^1

On en déduit que g admet des dérivées partielles par rapport à x et y en $(0,0)$ et :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0$$

On dispose alors de deux nouvelles fonctions :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \neq (0,0) &\mapsto \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} \\ (0,0) &\mapsto 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \neq (0,0) &\mapsto \frac{x^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ (0,0) &\mapsto 0 \end{aligned}$$

et il faut étudier la continuité de ces deux fonctions. On peut commencer par essayer les coordonnées polaires :

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) \right| = \left| \frac{2r^4 \cos \theta \sin^3 \theta}{r^4} \right| = 2 |\cos \theta \sin^3 \theta|$$

On voit qu'il n'est pas possible de majorer indépendamment de θ en conservant r . On regarde alors par exemple :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x,0) &= 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x}(0,y) &= 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,x) &= \frac{2x^4}{(2x^2)^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,x) \not\underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} \frac{\partial g}{\partial x}(0,0)$$

Donc $\partial g / \partial x$ n'est pas continue en $(0,0)$, donc g n'est pas de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

Définition 3 – Différentielle et gradient

Soient $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ et $(x_0, y_0) \in U$. On appelle gradient de f en (x_0, y_0) et on note $\nabla f(x_0, y_0)$ le vecteur :

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

On appelle différentielle de f en (x_0, y_0) (on l'utilisera peu) et on note $df(x_0, y_0)$ l'application linéaire :

$$\begin{aligned} df(x_0, y_0) : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

de sorte que :

$$df(x_0, y_0)(x, y) = \langle \nabla f(x_0, y_0), (x, y) \rangle$$

(produit scalaire canonique dans \mathbb{R}^2).

Remarque. Si f est une fonction de 3 variables, il faut ajouter une composante pour la variable z . □

Remarque. Avec les opérations sur les dérivées partielles, on obtient facilement :

$$\begin{aligned} \nabla(f + g)(a) &= \nabla f(a) + \nabla g(a) \\ \nabla(fg)(a) &= g(a)\nabla f(a) + f(a)\nabla g(a) \end{aligned}$$

(formules utilisées en physique?) et pour les différentielles (peu utile pour nous) :

$$\begin{aligned} d(f + g)(a) &= df(a) + dg(a) \\ d(fg)(a) &= f(a)dg(a) + g(a)df(a) \end{aligned} \quad \square$$

Exemple. Pour la fonction f de l'exercice 1, qui est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 , et pour $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{2x^4y}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} (y^3, x^2)$$

Par ailleurs :

$$\nabla f(0, 0) = (0, 0) \quad \square$$

Exercice 3 Points critiques. On appelle point critique d'une fonction f de classe C^1 tout point (x, y) tel quel $\nabla f(x, y) = 0$.

- (a) Déterminer les points critiques de $f : (x, y) \mapsto x^3 - 3x(1 + y^2)$.
- (b) Déterminer les points critiques de $g : (x, y) \mapsto xy - x^2$.

I. Dérivées partielles et fonctions de classe C^1

Réponse :

Les fonctions f et g sont de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 comme sommes de produits de fonctions de classe C^1 .

(a) Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 3x^2 - 3(1 + y^2) = 3(x^2 - 1 - y^2) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -6xy\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 - y^2 = 0 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x^2 - 1 - y^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^2 - 1 - y^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \right) \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{cases} y^2 = -1 \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \right)\end{aligned}$$

Comme $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $y^2 = -1$ est impossible. On a donc :

$$\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \text{ et } y = 0 \Leftrightarrow (x, y) \in \{(1, 0), (-1, 0)\}$$

La fonction f possède donc deux points critiques qui sont $(1, 0)$ et $(-1, 0)$.

(b) Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= y - 2x \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= x\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\nabla g(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$$

La fonction g possède donc un seul point critique qui est $(0, 0)$.

Théorème 4 – DL_1 pour une fonction de classe C^1

Si $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ et $(x_0, y_0) \in U$, alors :

$$f(x_0 + x, y_0 + y) = f(x_0, y_0) + x \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \underset{(x, y) \rightarrow (0, 0)}{o}(\|(x, y)\|_2)$$

On peut noter ceci de différentes facons :

$$f(x_0 + x, y_0 + y) = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (x, y) \rangle + \underset{(x, y) \rightarrow (0, 0)}{o}(\|(x, y)\|_2)$$

ou encore si on considère $(x_1, y_1) \in U$:

$$f(x_1, y_1) = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (x_1 - x_0, y_1 - y_0) \rangle + \underset{(x_1, y_1) \rightarrow (x_0, y_0)}{o}(\|(x_1 - x_0, y_1 - y_0)\|_2)$$

Corollaire 5 – Une fonction de classe C^1 est continue

Si $f \in C^1(U, \mathbb{R})$, alors f est continue sur U .

⚠ Remarque. Dans la cas général, pour les fonctions de plusieurs variables, l'existence des dérivées partielles de f sur U n'entraîne pas la continuité de f sur U . \square

◇ Ci-dessous une première application, assez intuitive mais qui finalement sert peu dans les exercices.

Théorème 6 – Caractérisation des fonctions constantes

Si $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ et U est un ouvert convexe de \mathbb{R}^2 (ou \mathbb{R}^3), alors on a équivalence entre :

- (i) La fonction f est constante sur U ;
- (ii) Toutes les dérivées partielles de f sont nulles sur U .

(On peut donner d'autres formulations avec la différentielle, le gradient.)

II. Application : recherche d'extrémums

Définition 7 – Extremum global, extremum local

Soient $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ avec $D \subset \mathbb{R}^2$. On dit que f admet en $(x_0, y_0) \in D$:

- Un maximum global lorsque : $\forall (x, y) \in D, f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$;
- Un maximum local lorsqu'il existe $r > 0$ tel que : $\forall (x, y) \in \mathcal{B}((x_0, y_0), r), f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$.

Rappel : $\mathcal{B}((x_0, y_0), r)$ est la boule ouverte de centre (x_0, y_0) et de rayon r . Dire que $(x, y) \in \mathcal{B}((x_0, y_0), r)$ signifie que la distance entre (x, y) et (x_0, y_0) est strictement inférieure à r (on considère que la norme utilisée est la norme euclidienne canonique).

On définit de même les notions de minimum global et minimum local.

On dit que f admet en a un extremum global (respectivement un extremum local) lorsque f admet en a un minimum global ou un maximum global (respectivement un minimum local ou un maximum local).

Remarque. Et ces notions s'étendent sans difficultés au cas des fonctions de 3 variables. \square

♦ Pour les fonctions d'une seule variable, les dérivées sont utilisées dans la recherche des maximums et minimums des fonctions. Il ne faut cependant pas croire que si une fonction admet un maximum en un point alors sa dérivée est nécessairement nulle en ce point. Même lorsqu'il n'y a qu'une seule variable, ce résultat est faux. Par exemple la fonction $f : x \in [0, 1] \mapsto x$ admet clairement un maximum en 1 et pourtant sa dérivée n'est pas nulle en 1. Pour que le résultat soit valable, il faut considérer une fonction définie sur un ensemble ouvert.

Proposition 8 – Condition nécessaire d'extremum local

Si U est un ouvert de \mathbb{R}^p , $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ et f admet en $a \in U$ un extremum local, alors $\nabla f(a) = 0$ (réciproque fausse).

Remarque. On appelle point critique de $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ toute solution de l'équation $\nabla f(a) = 0$. \square

Exercice 4 Un maximum sur un fermé borné. On considère la fonction f et l'ensemble T définis par :

$$f : (x, y) \mapsto x^2 - xy + y^2 + x + y$$

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3\}$$

On pose également $V = \overset{\circ}{T}$ (l'intérieur de T) et $F = \text{fr}(D)$ (la frontière de T). On considère de plus les points du plan $O = (0, 0)$, $A = (-3, 0)$ et $B = (0, -3)$.

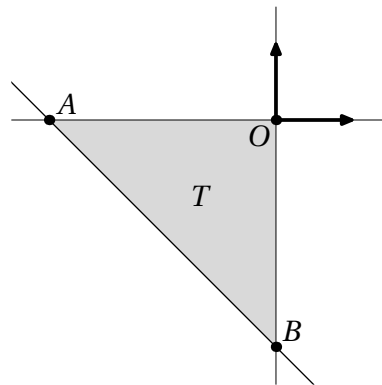
- Représenter graphiquement l'ensemble T ainsi que les points A , B et C et justifier que T est une partie fermée et bornée de \mathbb{R}^2 .
- Démontrer que f admet un maximum sur T .
- Déterminer les points critiques de f ainsi que les valeurs dans f en ces points.

- (d) Déterminer les valeurs prises par f sur le segment $[OA]$ et préciser le maximum de ces valeurs. Faire de même avec le segment $[OB]$ puis le segment $[AB]$.
- (e) On note $(x_0, y_0) \in T$ un point où f atteint son maximum. On constate que $T = V \cup F$ donc (x_0, y_0) appartient soit à V soit à F . En utilisant ce qui précède, déterminer le maximum de f sur T .

Remarque : si le même principe, on peut déterminer le minimum de f sur T .

Réponse :

- (a) Un élément $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ appartient à T lorsque $x \leq 0$ (le point est à gauche de l'axe des ordonnées), $y \leq 0$ (le point est en dessous de l'axe des abscisses) et $y \geq -3 - x$ (le point est au dessus de la droite d'équation $y = -3 - x$). On représente graphiquement ces trois droites et l'ensemble T .



L'ensemble T est borné, par exemple $T \subset \overline{B}(0, 3)$ (boule formée pour la norme euclidienne canonique). Considérons (x_n, y_n) suite d'éléments de T qui converge vers $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a alors $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$, $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \leq 0, y_n \leq 0, x_n + y_n \leq 3$$

Par passage à la limite d'inégalités larges, on obtient $a \leq 0$, $b \leq 0$ et $a + b \leq -3$ donc $(a, b) \in T$. Par caractérisation séquentielle, T est fermé.

- (b) La fonction f est continue sur \mathbb{R}^2 comme somme de produits de fonctions continues. Comme T est fermé et borné, f est bornée sur T et atteint ses bornes, en particulier f admet un maximum sur T .
- (c) La fonction f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 comme somme de produits de fonctions de classe C^1 et pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x - y + 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -x + 2y + 1 \end{aligned}$$

On recherche les points critiques de f :

$$\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -1$$

La fonction f admet donc un unique point critique sur \mathbb{R}^2 et :

$$f(-1, -1) = -1$$

II. Application : recherche d'extrémums

- (d) Considérons un point (x, y) sur le segment $[OA]$, on a alors $y = 0$ et $x \in [-3, 0]$ donc :

$$f(x, y) = f(x, 0) = x^2 + x = x(x + 1)$$

Posons $u(x) = x^2 + x$, il est facile d'étudier les variations de cette fonction, soit à l'aide de sa dérivée soit en constatant que u est un polynôme du second degré dont les racines sont 0 et -1 . La fonction u est décroissante jusqu'à $-1/2$ puis croissante. Sur l'intervalle $[-3, 0]$, son maximum est atteint en -3 ou en 0 . Or $u(0) = 0$ et $u(-3) = (-3)^2 - 3 = 6$. Ainsi, le maximum de f sur $[OA]$ est 6, atteint au point A . Considérons maintenant un point (x, y) sur le segment $[OB]$, on a alors $x = 0$ et $y \in [-3, 0]$ donc :

$$f(x, y) = f(0, y) = y^2 + y$$

L'étude précédente montre que cette quantité est maximale pour $y = -3$. Ainsi, le maximum de f sur $[OB]$ est 6, atteint au point B . Si le point (x, y) est sur le segment $[AB]$, alors $y = -3 - x$ avec $x \in [-3, 0]$ donc :

$$f(x, y) = f(x, -3 - x) = 3x^2 + 9x + 6$$

On pose $v(x) = 3x^2 + 9x + 6$, la fonction v est polynomiale et $v'(x) = 6x + 9$. Ainsi v' s'annule en $-3/2$ et v est décroissante jusqu'à $-3/2$ puis croissante. La fonction v est donc maximale soit en -3 soit en 0 or $v(0) = 6$ et $v(-3) = 6$ donc le maximum de v sur $[-3, 0]$ est 6. Le maximum de f sur $[AB]$ est 6, atteint en A et en B .

- (e) Il y a deux cas possibles :

- Soit $(x_0, y_0) \in F$, dans ce cas le maximum de F est atteint sur l'un des segments $[OA]$, $[OB]$, $[OC]$. D'après l'étude précédente il est atteint soit en A ou B donc $(x_0, y_0) \in \{A, B\}$.
- Soit $(x_0, y_0) \in V$, dans ce cas f admet un maximum sur V . Comme V est ouvert et f est de classe C^1 , ce maximum est nécessairement atteint en un point critique de f , donc en $C = (-1, -1)$ et ainsi $(x_0, y_0) = (-1, -1)$.

On a donc $(x_0, y_0) \in \{A, B, C\}$. Les valeurs de f en ces points sont 6 et -1 , le maximum de f sur T est donc égal à 6 et il est atteint en A et B .

Exercice 5 *Un minimum sur un fermé borné.* On considère la fonction f et l'ensemble D définis par :

$$f : (x, y) \mapsto \sqrt{1 + x^2 + y^2} - y^2$$
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$$

Représenter graphiquement l'ensemble D . Démontrer que f admet un minimum sur D et le déterminer.

Exercice 6 *Extrémums sur \mathbb{R}^2* . On considère la fonction :

$$f : (x, y) \mapsto x^3 - 3x(1 + y^2)$$

On a déterminé dans l'exercice 3 que f possède exactement deux points critiques qui sont $(1, 0)$ et $(-1, 0)$.

- (a) Étudier le signe (strict) de l'expression $f(1 + t, 0) - f(1, 0)$ pour t au voisinage de 0. Étudier ensuite le signe (strict) de l'expression $f(1, t) - f(1, 0)$ pour t au voisinage de 0. La fonction f admet-elle un extrémum local en $(1, 0)$?
- (b) Étudier de même si f possède un extrémum local en $(-1, 0)$.