Calcul différentiel

◇ Le but du chapitre est de définir les dérivées partielles ainsi que la notions de classe C^1 pour les fonctions de plusieurs variables. Les applications usuelles de ceci :

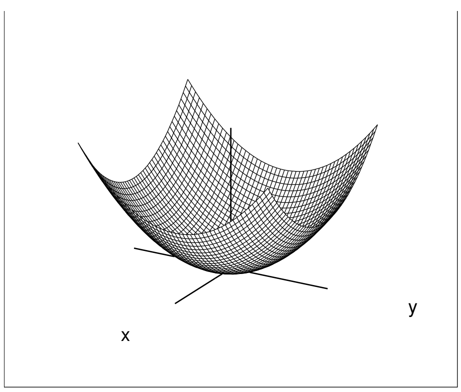
- La recherche d'extrémums : si f est de classe C^1 sur un intervalle ouvert U et si f admet un extrémum en $a \in U$ alors les dérivées partielles de f s'annulent en a.
- La résolution d'équations aux dérivées partielles, par exemple l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

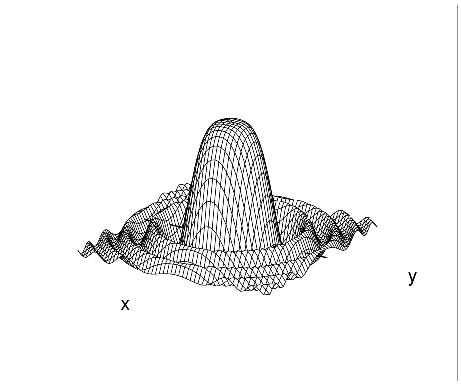
Remarque. Les résultats de ce chapitre s'appliquent à des fonctions de n variables. Pour simplifier, les énoncés sont données pour des fonctions de 2 variables, notées en général x et y et on fera des remarques sur les fonctions de 3 variables. □

◇ Quelques représentations graphiques de fonctions de 2 variables. Si f est une fonction de 2 variables, on peut représenter graphiquement f dans l'espace en plaçant les points de coordonnées (x, y, z) avec $z = f(x, y)$. Cela donne une surface dans l'espace (de manière analogue, la représentation graphique d'une fonction f d'une seule variable est la courbe du plan constituée des points de coordonnées (x, y) avec $y = f(x)$). On donne ci-dessous quelques exemples de surface représentant des fonctions de 2 variables.

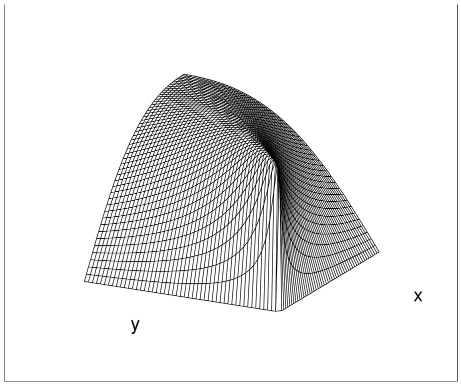
$f(x, y) = x^2 + y^2$



$$f(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)$$
$$= 1 \quad \text{sinon}$$



$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)$$
$$= 0 \quad \text{sinon}$$



Notation : Dans la suite U sera un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$ pour les fonctions de 3 variables).□

Remarque. Nous aurons besoin dans ce chapitre de notions étudiées dans le cours de topologie, essentiellement ouvert, fermé et continuité pour une fonction de plusieurs variables. On utilisera aussi la norme usuelle $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$ (dans le cas de 3 variables $\|(x,y,z)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$). □

I. Dérivées partielles et fonctions de classe C^1

Définition 1 – Dérivées partielles

Soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in U$. On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à x en (x_0, y_0) lorsque le taux d'accroissement (suivant la première variable) :

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

admet une limite finie lorsque $h \to 0$. Lorsque c'est le cas, on note :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

De même, on dit que f admet une dérivée partielle par rapport à y en (x_0, y_0) lorsque le taux d'accroissement (suivant la deuxième variable) :

$$\frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

admet une limite finie lorsque $h \to 0$ et lorsque c'est le cas on note :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Définition 2 – Fonction de classe C^1

On dit que $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur U lorsque :

- *La fonction f admet des dérivées partielles par rapport à x et y en tout point $(x_0, y_0) \in U$;*
- *Les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur U.*

On note $\mathrm{C}^1(U, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies et de classe C^1 sur U et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarque. La notion de continuité pour une fonction de plusieurs variable a été vue dans le cours de topologie (illustrations du cours de topologie exercice 2 et TD 20 exercice 6). □

Remarque. S'il y a une troisième variable z_0, on est amené à définir la dérivée partielle par rapport à z :

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0 + h) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

sous réserve d'existence et f est de classe C^1 si, et seulement si, ses trois dérivées partielles sont définies et continues sur U. □

Remarque. Comme d'habitude, on dispose de résultats concernant les opérations : dérivée par rapport à x ou y d'une somme, d'un produit, d'un quotient dont le dénominateur ne s'annule pas. Il s'agit des formules usuelles et pour simplifier on ne les détaille pas ici. La dérivée d'une composée est plus délicate et fait l'objet d'un paragraphe ultérieur. Comme d'habitude une somme de fonctions de classe C^1, un produit de fonctions de classe C^1 sont de classe C^1. De même pour un quotient de fonctions de classe C^1 dont le dénominateur ne s'annule pas. $\square$