TD 22 : Compléments sur les variables aléatoires discrètes

Loi conjointe, lois marginales, loi conditionnelle

Exercice 1. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbf{P}(X=i, Y=j) = \frac{1}{e2^{i+1}j!}$$

(a) Déterminer les lois marginales du couple (X,Y).
(b) Démontrer que $1+X$ suit une loi géométrique et déterminer l'espérance de X et Y.
(c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
(d) Déterminer $\mathbf{P}(X=Y)$.

Exercice 2 *(Oral CCP, PC, 2017, Exercice secondaire).* Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes telles que $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la loi de Y sachant $(X=n)$ est une loi binomiale de paramètres n, p avec $p \in]0,1[$. (a) Déterminer la loi conjointe de X et Y. (b) Déterminer la loi de Y.

Autour des maximums et minimums

Exercice 3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose qu'il existe $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$ tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}(X=k) = \mathbf{P}(Y=k) = pq^k$$

On considère alors les variables U et V définies par $U = \max(X,Y)$ et $V = \min(X,Y)$.
(a) Déterminer la loi du couple (U,V).
(b) Déterminer la loi marginale de U.
(c) Déterminer $\mathbf{E}(U)$.

Exercice 4. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soient $p \in]0,1[$, et $q = 1-p$. On considère N variables aléatoires $X_1, \dots, X_N$ indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.
(a) Pour $i \in [\![1,N]\!]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbf{P}(X_i > n)$.
(b) On pose $Y = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}(X_i)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbf{P}(Y > n)$ et en déduire $\mathbf{P}(Y=n)$.
(c) Reconnaitre la loi de Y. En déduire $\mathbf{E}(Y)$.

Couples, covariance

Exercice 5. Une urne contient des boules numérotées de 1 à n. On en tire deux, successivement et avec remise et on note X (respectivement Y) le plus grand numéro tiré (respectivement le plus petit). On notera également S le premier numéro tiré et T le second.
(a) Déterminer la loi conjointe du couple (X,Y).
(b) Déterminer les lois marginales de X et Y.
(c) Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{E}(Y)$.
(d) Calculer $\mathbf{Cov}(X,Y)$. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
(e) Déterminer $\mathbf{V}(X+Y)$.

Indications

Ex 1. (a) Méthode usuelle. (b) Calculer $\mathbf{P}(X+1=k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire $\mathbf{E}(X+1)$. Vérifier que Y suit une loi usuelle. (c) Utiliser la définition. (d) Quel est le lien entre $\mathbf{P}(X=Y)$ et les évènements $[X=k] \cap [Y=k]$?

Ex 2. (a) Formule des probabilités composées, et faire attention aux cas particuliers. (b) Formule des probabilités totales.

Ex 3. (a) Calculer $\mathbf{P}(U=m, V=n)$ en distinguant $m=n$, $m<n$ et $m>n$. (b) Méthode usuelle. (c) Utiliser l'une des expressions donnant $\mathbf{E}(U)$.

Ex 4. (a) Méthode usuelle. (b) Exprimer l'evènement $[Y>n]$ à l'aide des évènements $[X_i>n]$ pour $i \in [\![1,N]\!]$. (c) Écrire l'evènement $[Y=n]$ à l'aide des évènements $[Y>n]$ et $[Y \geqslant n]$.

Ex 5. (a) Déterminer $\mathbf{P}(X=k, Y=k)$, pour $i<j$ déterminer $\mathbf{P}(X=j, Y=i)$. (2) Méthode usuelle. (3) Définition de l'espérance.