TD 21 : Variables aléatoires discrètes

Calculs avec des lois de probabilité

Exercice 1. Justifier qu'il existe une vad X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

Démontrer que X n'admet pas d'espérance finie. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $Y = (-1)^X$.

Exercice 2 *(Oral Mines Télécom, MP, 2019)*. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Montrer que $Y = 1/(2X+1)$ admet une espérance et la calculer.

Exercice 3 *(Oral CCP, PSI, 2016)*. Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. (a) Calculer l'espérance de $Y = X^2 + 1$. (b) Calculer $\mathbf{P}(2X < Y)$. (c) Calculer la probabilité que X soit pair ; y a-t-il plus de chances que X soit impair?
Réponse. La vad Y est à valeurs positives donc elle admet une espérance finie ou $+\infty$ et :

$$\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(X^2) + 1$$

Comme $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, on sait que X admet une espérance et une variance finie et on a :

$$\mathbf{E}(X^2) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{E}(X)^2 = \lambda + \lambda^2$$

On en déduit $\mathbf{E}(Y) = \lambda + 1 + \lambda^2$. On a :

$$2X < Y \iff X^2 - 2X + 1 > 0 \iff (X-1)^2 > 0 \iff X \neq 1$$

Ainsi :

$$\mathbf{P}(2X < Y) = \mathbf{P}(X \neq 1) = 1 - \mathbf{P}(X = 1) = 1 - \lambda e^{-\lambda}$$

Enfin :

$$[X \text{ est pair}] = \bigcup_{n=0}^{+\infty} [X = 2n]$$

C'est une réunion d'évènements deux à deux incompatibles donc :

$$\mathbf{P}(X \text{ est pair}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = 2n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{2n}}{(2n)!} = e^{-\lambda}\operatorname{ch}(\lambda)$$

et on trouve de même :

$$\mathbf{P}(X \text{ est impair}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{2n+1}}{(2n+1)!} = e^{-\lambda}\operatorname{sh}(\lambda)$$

(on pouvait aussi utiliser le fait que X est impair est le complémentaire de X est pair). On a :

$$\operatorname{ch}\lambda = \frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2} > \frac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{2} = \operatorname{sh}(\lambda)$$

donc la probabilité que X est pair est strictement supérieure à celle de X impair.

Série génératrice

Exercice 4 *(Oral TPE, PSI, 2017)*. Soit X une variable aléatoire de fonction génératrice $G_X(t) = a\mathrm{e}^{1+t^2}$.

(a) Déterminer a.

(b) Déterminer la loi de X.

(c) Justifier que X admet une espérance et une variance et les déterminer.

Réponse. On rappelle que :

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n)\, t^n$$

et en particulier la série converge pour $t = 1$ et :

$$G_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n) = 1$$

On en déduit que $a\mathrm{e}^2 = 1$ donc $a = \mathrm{e}^{-2}$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$G_X(t) = \mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{n!} t^{2n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k)\, t^k$$

Par unicité du développement en série entière :

- Si k est impair, alors $\mathbf{P}(X = k) = 0$;
- Si k est pair, $k = 2n$, alors $\mathbf{P}(X = k) = \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{n!}$.

On en déduit que $X(\Omega)$ est l'ensemble des entiers positifs et pairs et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}(X = 2n) = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{n!}$$

La fonction G_X est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, en particulier elle est dérivable en 1 donc X admet une espérance finie et :

$$\mathbf{E}(X) = G_X'(1) = 2$$

La fonction G_X est deux fois dérivable en 1, avec le théorème de transfert :

$$G_X''(1) = 6 = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{E}(X(X-1))$$

On en déduit que X admet une variance et :

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X(X-1)) + \mathbf{E}(X) - \mathbf{E}(X^2) = 6 + 2 - 4 = 4$$

Exercice 5. Soit $p \in\,]0,1[$. Justifier qu'il existe une vad X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}(X = k) = -\frac{p^k}{k\ln(1-p)}$$

(a) Déterminer la série génératrice de X. (b) En déduire $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

Inégalités

Exercice 6. Soient $\lambda > 0$ et X une vad qui suit la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$. Établir les inégalités :

$$\mathbf{P}(X \geqslant \lambda + 1) \leqslant \lambda \quad \text{et} \quad \mathbf{P}\left(X \leqslant \frac{\lambda}{3}\right) \leqslant \frac{9}{4\lambda}$$

Exercice 7 *(Oral Mines-Ponts, PSI, 2016).*

(a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer l'existence d'une variable aléatoire X telle que

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad G_X(t) = \frac{1}{(2-t)^\alpha}$$

(b) Donner un équivalent de $\mathbf{P}(X = n)$ lorsque $n \to +\infty$ dans le cas où $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

(c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $\mathbf{P}(X \geqslant \lambda + \alpha) \leqslant \dfrac{2\alpha}{\lambda^2}$.

Réponse.

(a) La fonction $g : t \mapsto (2-t)^{-\alpha}$ est DSE sur $]-2, 2[$ et pour $t \in]-2, 2[$:

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2^\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-\alpha(-\alpha-1)\cdots(-\alpha-n+1)}{n!} \left(-\frac{t}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{2^\alpha 2^n n!}}_{=a_n} t^n \end{aligned}$$

Les coefficients a_n sont positif et comme la série entière $\sum a_n t^n$ a pour rayon de convergence 2, la série $\sum a_n$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = g(1) = 1$$

Il existe alors une vad X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X = n) = a_n$, autrement dit $G_X(t) = g(t)$.

(b) On suppose que α est un entier, $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas :

$$\mathbf{P}(X = n) = a_n = \frac{(\alpha+n)!}{2^\alpha 2^n (\alpha+n)(\alpha-1)!n!}$$

On utilise la formule de Stirling :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X = n) &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi(\alpha+n)}\left(\frac{\alpha+n}{\mathrm{e}}\right)^{\alpha+n}}{(\alpha+n)2^n 2^\alpha(\alpha-1)!\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\alpha+n}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\mathrm{e}^n}{\mathrm{e}^{n+\alpha}} \left(\frac{\alpha+n}{n}\right)^n \frac{(\alpha+n)^\alpha}{(\alpha+n)2^n 2^\alpha(\alpha-1)!} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{\alpha+n}{n}\right)^n \frac{(\alpha+n)^\alpha}{(\alpha+n)2^n 2^\alpha \mathrm{e}^\alpha(\alpha-1)!} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{\alpha+n}{n}\right)^n \frac{n^{\alpha-1}}{2^n 2^\alpha \mathrm{e}^\alpha(\alpha-1)!} \end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\left(\frac{\alpha+n}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln \frac{\alpha+n}{n}\right) = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^\alpha$$

donc :

$$\mathbf{P}(X = n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha-1}}{2^n 2^\alpha(\alpha-1)!}$$

(c) La fonction G_X est dérivable en 1 donc X admet une espérance finie et on a :

$$\mathbf{E}(X) = g'(1) = \alpha$$

La variable aléatoire X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ donc $X(X-1)$ est à valeurs positives donc $X(X-1)$ admet une espérance finie ou $+\infty$. Par ailleurs, G_X est deux fois dérivable en 1 et avec le théorème de tranfert :

$$G_X''(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\mathbf{P}(X=n) = \mathbf{E}(X(X-1)) = \alpha^2 + \alpha$$

On en déduit que X admet une variance et :

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X(X-1)) + \mathbf{E}(X) - \mathbf{E}(X^2) = 2\alpha$$

Soit $\lambda > 0$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$$\mathbf{P}\left(|X-\alpha| \geqslant \lambda\right) \leqslant \frac{2\alpha}{\lambda^2}$$

Or :

$$\mathbf{P}\left(|X-\alpha| \geqslant \lambda\right) = \mathbf{P}\left([X-\alpha \leqslant -\lambda] \cup [X-\alpha \geqslant \lambda]\right) \geqslant \mathbf{P}\left(X-\alpha \geqslant \lambda\right)$$

On en déduit :

$$\mathbf{P}\left(X-\alpha \geqslant \lambda\right) \leqslant \frac{2\alpha}{\lambda^2}$$

Exercice 8. Soit $\lambda > 0$. On considère une variable aléatoire X suivant la loi $\mathscr{P}(\lambda)$.

(a) Montrer que $\mathbf{P}(|X-\lambda| \geqslant \lambda) \leqslant 1/\lambda$. En déduire que $\mathbf{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant 1/\lambda$.

(b) Déterminer G_X la série génératrice de X.

(c) Montrer que $\forall t \in [1,+\infty[$, $\forall a > 0$, $\mathbf{P}(X \geqslant a) \leqslant G_X(t)/t^a$.

(d) Déterminer le minimum sur $[1,+\infty[$ de la fonction $g : t \mapsto \exp(t-1)/t^2$.

(e) En déduire que $\mathbf{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant (\mathrm{e}/4)^\lambda$.

(f) Comparer cette inégalité avec celle obtenue en a pour $\lambda = 10$.

Réponse.

(a) On a $\lambda > 0$ et X admet une espérance et une variance finies. On utilise l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev :

$$\mathbf{P}\left(|X-\lambda| \geqslant \lambda\right) \leqslant \frac{\mathbf{V}(X)}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$

(b) Par définition :

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X=n)t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}(\lambda t)^n}{n!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda t}$$

Cette série exponentielle est toujours convergente donc G_X est définie sur $\mathbb{R}$ (de rayon de convergence $+\infty$).

(c) L'inégalité de Markov donnerait :

$$\mathbf{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbf{E}(X)}{a} = \frac{G_X'(1)}{a}$$

Ce n'est pas ce qui est démandé dans l'énoncé. Soit $t > 1$, avec le théorème de transfert on a :

$$G_x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \mathbf{P}(X = n) = \mathbf{E}(t^X)$$

et par ailleurs, puisque $t > 1$:

$$X \geqslant a \iff X \ln(t) \geqslant a \ln(t) \iff t^X \geqslant t^a$$

On applique l'inégalité de Markov à la variable aléatoire t^X qui est à valeurs positives et admet une espérance finie $G_X(t)$:

$$\mathbf{P}(X \geqslant a) = \mathbf{P}(t^X \geqslant t^a) \leqslant \frac{G_x(t)}{t^a}$$

Cette inégalité reste vraie pour $t = 1$ puisque $\dfrac{G_X(1)}{1^a} = 1$.

(d) Une simple étude de fonction montre que $g : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{t-1}}{t^2}$ atteint son minimum en 2 et $g(2) = \dfrac{\mathrm{e}^1}{4}$.

(e) On reprend le résultat de la question (c). Pour tout $t \geqslant 1$:

$$\mathbf{P}(X \geqslant 2\lambda) = \mathbf{P}(t^X \geqslant t^a) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{\lambda(t-1)}}{t^{2\lambda}} = g(t)^\lambda$$

Ceci est en particulier vrai pour $t = 2$:

$$\mathbf{P}(X \geqslant 2\lambda) = \mathbf{P}(t^X \geqslant t^a) \leqslant g(2)^\lambda = \left(\frac{\mathrm{e}^1}{4}\right)^\lambda$$

(f) Prenons $\lambda = 10$. L'inégalité de la question (a) donne :

$$\mathbf{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \frac{1}{10} = 0.1$$

L'inégalité de la question précédente donne :

$$\mathbf{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \left(\frac{\mathrm{e}^1}{4}\right)^{10} \simeq 0.02$$

L'inégalité de la question précédente est plus précise que celle de la question (a).

Modélisation d'expériences aléatoires

Exercice 9. On répète indéfiniment une expérience aléatoire. On considère pour $k \in \mathbb{N}^*$ les évènements S_k : « la k-ième tentative est un succès » et E_k : « la k-ième tantative est un échec. » Les résultats (succès ou échec) des différentes tentatives sont supposés indépendants et on suppose également que $\mathbf{P}(S_k) = 1/(k+1)$ et $\mathbf{P}(E_k) = k/(k+1)$. On note X le rang de la première tentative qui est un succès en convenant de prendre $X = \infty$ s'il n'apparait jamais de succès.

(a) Déterminer la loi de X.
(b) Déterminer $\mathbf{E}(X)$.

Réponse. On a par définition $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, les tentatives étant indépendantes :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X = n) = \mathbf{P}(E_1 \cap \cdots \cap E_{n-1} \cap S_n) = \mathbf{P}(S_n) \prod_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}(E_k) = \frac{1}{n+1} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n-1)!}{n!} \\ = \frac{1}{n(n+1)}\end{aligned}$$

Les évènements $[X=\infty]$ et $[X=n]$, $n \in \mathbb{N}^*$ constituent un système complet d'évènements, on a donc :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X=\infty) &= 1-\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbf{P}(X=n) = 1-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1-\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\
&= 1-\lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1}\right) = 1-\lim_{N\to+\infty}\left(1-\frac{1}{N+1}\right)\\
&= 0
\end{aligned}$$

L'évènement $[X=\infty]$ est négligeable. La variable aléatoire X est à valeurs positives, elle admet donc une espérance finie ou $+\infty$ et on a :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbf{P}(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+1} = +\infty$$

car cette série est divergente.

Exercice 10. On lance autant de fois que nécessaire une pièce équilibrée. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'évènement : « entre le premier lancer et le k-ième, on a vu apparaitre au moins une fois pile et une fois face. » On note X la variable aléatoire discrète égale au rang du lancer pour lequel on a obtenu pour la première fois au moins une fois pile et une fois face (ainsi, $X=k$ signifie que A_k est réalisé mais pas A_{k-1}). Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note P_k l'évènement « le k-ième lancer donne pile » et $F_k = \overline{P_k}$.

(a) Déterminer $X(\Omega)$.

(b) Écrire l'évènement $[X=k]$ à l'aide des évènements P_i et F_i. En déduire la loi de X.

(c) Déterminer la fonction génératrice de X.

(d) Démontrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.

(e) Déterminer $\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right)$.

Réponse. On a $X(\Omega) = \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Ensuite pour $k \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X=k) &= \mathbf{P}((P_1\cap\cdots\cap P_{k-1}\cap F_k)\cup(F_1\cap\cdots\cap F_{k-1}\cap P_k))\\
&= \mathbf{P}(P_1\cap\cdots\cap P_{k-1}\cap F_k)+\mathbf{P}(F_1\cap\cdots\cap F_{k-1}\cap P_k)\\
&= \frac{1}{2^{k-1}}
\end{aligned}$$

car on a une réunion de deux évènements incompatibles et les lancers sont supposés indépendants. On trouve alors :

$$G_X(t) = \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{t^k}{2^{k-1}} = \frac{t^2}{2-t}$$

Le rayon de convergence de cette série entière est égal à 2. On note que X, $X(X-1)$ et X^2 sont à valeurs positives donc elles admettent des espérances finies ou $+\infty$. Après calculs et justifications usuelles :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= G_X'(1) = 3\\
\mathbf{E}(X(X-1)) &= G_X''(1)\\
\mathbf{V}(X) &= \mathbf{E}(X(X-1))+\mathbf{E}(X)-\mathbf{E}(X^2) = G_X''(1)+G_X'(1)-G_X'(1)^2 = 2
\end{aligned}$$

(on pourrait aussi remarquer que $X-1 \sim \mathscr{G}(1/2)$). Enfin :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}A_k\right) = 1-\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty}\overline{A_k}\right) = 1-\mathbf{P}\left(\bigcap_{N=1}^{+\infty}B_N\right) \quad \text{en posant } B_N = \bigcap_{k=1}^{N}\overline{A_k}$$

L'évènement B_N signifie que aucun des évènements $A_1, \ldots, A_N$ n'est réalisé, autrement dit l'évènement B_N signifie qu'entre les lancers 1 et N on n'a pas vu apparaitre les deux côtés de la pièce. Ainsi :

$$B_N = (P_1 \cap \cdots \cap P_N) \cup (F_1 \cap \cdots \cap F_N)$$

La réalisation de B_{N+1} entraine celle de B_N donc la suite (B_N) est décroissante. Avec le théorème sur les limites monotones :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = 1 - \lim_{N\to+\infty} \mathbf{P}(B_N) = 1 - \lim_{N\to+\infty} \mathbf{P}\left((P_1 \cap \cdots \cap P_N) \cup (F_1 \cap \cdots \cap F_N)\right)$$

On a une réunion de deux évènements incompatibles et les lancers sont indépendants, donc :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = 1 - \lim_{N\to+\infty} \left(p^N + (1-p)^N\right) = 0$$

Il était également possible d'utiliser :

$$0 \leqslant \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{A_k}\right) \leqslant \mathbf{P}(B_N) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

Exercice 11. On considère une expérience aléatoire ayant la probabilité $p > 0$ de réussir et $1-p$ d'échouer. On répète l'expérience indépendamment jusqu'à obtention de m succès et on note T_m le nombre d'essais nécessaires à l'obtention de ces m succès.

(a) Reconnaître la loi de T_1. Donner l'espérance et la variance de T_1.
(b) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par T_m.
(c) Pour $j, k \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbf{P}(T_1 = j, T_2 = k)$. En déduire la loi de T_2.
(d) Déterminer la série génératrice de T_2 en précisant son domaine de définition.
(e) Démontrer que T_2 possède une espérance et une variance que l'on déterminera.

Exercice 12 *(Oral CCP, PSI, 2017)*. On lance une pièce équilibrée; X est la variable aléatoire représentant le nombre de lancers nécessaires pour obtenir la séquence *pile-face* et Y est la variable aléatoire représentant le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier *pile*.

(a) Déterminer la loi de Y.
(b) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \geqslant 2$, déterminer $\mathbf{P}(Y = k, X = n)$. En déduire la loi de X.
(c) Donner l'espérance de X.

Exercice 13 *(Oral TPE, MP, 2018)*. Soit $p \in \,]0,1[$. Soit un mobile M se déplaçant sur l'axe des abscisses gradué par $\mathbb{Z}$. Le module se déplace par étapes successives et indépendantes. Il a une probabilité p de se déplacer de $+1$ et une probabilité $1-p$ de se déplacer de -1. Soit X_n la variable aléatoire donnant la position du mobile au bout de n étapes. On pose $X_0 = 0$. Déterminer la loi de X_n puis son espérance.

Indications

Ex 1. Définition de l'espérance ; théorème de transfert.

Ex 2. Théorème de transfert.

Ex 3. (a) Théorème de transfert ou utiliser la variance de X. (b) Démontrer que $2X < Y \Leftrightarrow X \neq 1$. (c) Méthode usuelle utilisant la σ-additivité.

Ex 4. (a) Utiliser $G_X(1)$. (b) Expliciter le DSE de $G_X(t)$. (c) Méthode du cours.

Ex 5. (a) Utiliser le DSE de $\ln(1+x)$. (b) Méthode du cours.

Ex 6. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Ex 7. (a) Commencer par déterminer que la fonction donnée est DSE et obtenir les coefficients de son développement. (b) Formule de Stirling. (c) Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Ex 8. (a) Utiliser une inégalité du cours. (b) Méthode du cours. (c) Utiliser une inégalité du cours avec la variable aléatoire t^X. (d) Méthode usuelle. (e) Utiliser les questions précédentes.

Ex 9. (a) Écrire $[X = n]$ à l'aide des évènements S_i et E_i. Utiliser les système complet d'évènements $[X = \infty], [X = n]$, $n \geqslant 1$. (b) Utiliser la définition.

Ex 10. Méthodes usuelles.

Ex 11. (a) Loi usuelle. (b) Noter que T_m ne peut pas prendre certaines valeurs. (c) Écrire l'évènement $[T_1 = j, T_2 = k]$ Uà l'aide des évènements S_i (la i-ème tentative est un succès) et E_i (la i-ème tentative est un échec). (d) Méthode usuelle. (e) Méthode usuelle.

Ex 12. (a) Loi usuelle. (b) Écrire l'évènement $[X = n] \cap [Y = k]$ à l'aide des évènements usuels P_i et F_i. Formule des probabilités totales pour obtenir la loi de X.

Ex 13. Considérer tout d'abord U_n le nombre de déplacements de $+1$ durant les n premiers déplacements. Reconnaitre que U_n suit une loi usuelle puis exprimer X_n en fonction de U_n.