



TD 17 : Topologie

Ouverts et fermés (et bornés et convexes)

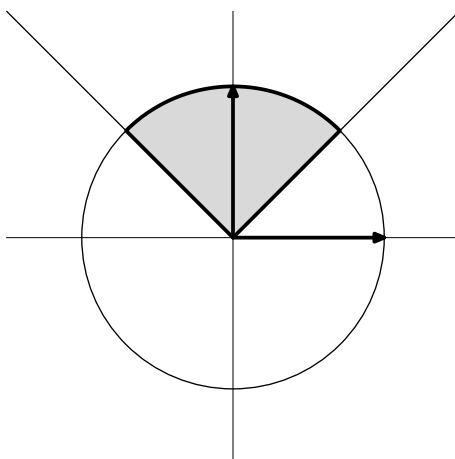
Exercice 1. Pour chacun des ensembles suivants : le représenter graphiquement, déterminer si c'est un ouvert ou un fermé de $\mathbb{R}^2$ et le justifier, préciser son adhérence et son intérieur (sans justification).

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq y \text{ et } x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > 1 \text{ ou } y > 1\}$$

Démontrer de plus que A est bornée.

Réponse. Ensemble A en gris ci-dessous.



$$A = A_1 \cap \overline{\mathcal{B}}(0, 1) \quad \text{pour } \|\cdot\|_2$$

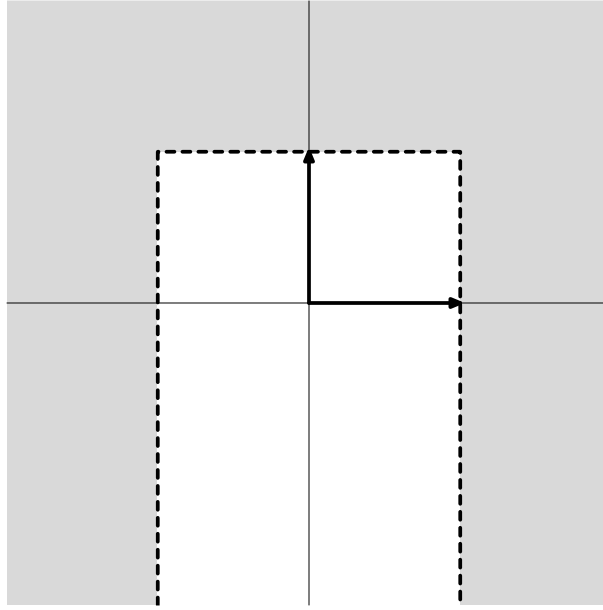
$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) \geq 0\} \quad \text{avec } f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto y - |x|$$

Comme $A \subset \overline{\mathcal{B}}(0, 1)$, A est bornée.

La fonction f est continue comme composée de fonctions continues donc A_1 est fermé. La boule fermée de centre 0 et de rayon 1 est un fermé. Par conséquent, A est fermée comme intersection de deux fermés. On a ainsi $\overline{A} = A$. Par ailleurs :

$$\overset{\circ}{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < y \text{ et } x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Ensemble B en gris ci-dessous.



$$\mathbb{R}^2 \setminus B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1 \text{ et } y \leq 1\}$$

Soit $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ suite d'éléments de $\mathbb{R}^2 \setminus B$ qui converge vers $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a alors :

$$\begin{aligned} x_n &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \\ \forall n \in \mathbb{N}, |x_n| &\leq 1 \\ y_n &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b \\ \forall n \in \mathbb{N}, y_n &\leq 1 \end{aligned}$$

Par passage à la limite dans les inégalités larges, on obtient $|a| \leq 1$ et $b \leq 1$. On a donc $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus B$. Par caractérisation séquentielle, $\mathbb{R}^2 \setminus B$ est fermé donc B est ouvert. On a ainsi $\overset{\circ}{B} = B$. Par ailleurs :

$$\overline{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \geq 1 \text{ ou } y \geq 1\}$$

Exercice 2. On note :

$$F = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 P(t) dt \geq 1 \right\}$$

Démontrer que F est un fermé convexe de $\mathbb{R}_n[X]$.

Réponse. On définit les applications :

$$\begin{aligned} f : P \in \mathbb{R}_n[X] &\mapsto P(0) \\ g : P \in \mathbb{R}_n[X] &\mapsto \int_0^1 P(t) dt \end{aligned}$$

Les applications f et g sont linéaires et $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie donc f et g sont continues et $g - 1$ est continue. On a alors :

$$\begin{aligned} F_1 &= \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid f(P) = 0\} \\ F_2 &= \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid g(P) - 1 \geq 0\} \end{aligned}$$

qui sont des fermés de $\mathbb{R}_n[X]$. Ainsi, F est fermé comme intersection de deux fermés. Soient $P, Q \in F$ et $\lambda \in [0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} (\lambda P + (1 - \lambda)Q)(0) &= \lambda P(0) + (1 - \lambda)Q(0) = 0 \\ \int_0^1 (\lambda P(t) + (1 - \lambda)Q(t)) dt &= \lambda \int_0^1 P(t) dt + (1 - \lambda) \int_0^1 Q(t) dt \geq \lambda \times 1 + (1 - \lambda) \times 1 = 1 \end{aligned}$$

On a donc $\lambda P + (1 - \lambda)Q \in F$ donc F est convexe.

Exercice 3. Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et $a_1, \dots, a_n$ des éléments de E . On définit :

$$U = \left\{ x \in E \mid \prod_{k=1}^n \|x - a_k\| > 1 \right\}$$

Démontrer que U est un ouvert de E .

Exercice 4 (Oral CCP, PC, 2018, Exercice secondaire). On étudie

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 2 & y \\ x & 1 \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable dans } \mathbb{R} \right\}$$

- (a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(x, y) \in E$.
- (b) Montrer que E est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Réponse. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $M = \begin{pmatrix} 2 & y \\ x & 1 \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & y \\ x & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 1) - xy = \lambda^2 - 3\lambda + 2 - xy$$

On considère le discriminant Δ :

$$\Delta = 9 - 4(2 - xy) = 8 + 4xy$$

On distingue trois cas :

- Si $\Delta < 0$, alors $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(M) = \emptyset$ et M n'est pas diagonalisable ;
- Si $\Delta > 0$, alors χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples et M est diagonalisable ;
- Si $\Delta = 0$, alors M possède une seule valeur propre λ et comme $M \neq \lambda I_2$, M n'est pas diagonalisable.

Par conséquent :

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 8 + 4xy > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) > 0\}$$

en posant $f : (x, y) \mapsto 8 + 4xy$. La fonction f est polynomiale donc continue et par conséquent E est un ouvert.

Exercice 5. Démontrer que l'ensemble $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n \mid x_1 + \dots + x_n \leq 1\}$ est un convexe.

Continuité et applications

Exercice 6. Étudier la continuité des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{|xy|}}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Réponse. Notons que le dénominateur :

$$x^2 + xy + y^2 = (x + \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3y^2}{4}$$

ne s'annule que pour $x = y = 0$ (on peut aussi résoudre l'équation d'inconnue x à y fixé). La fonction f est donc bien définie sur $\mathbb{R}^2$.

Les fonctions $(x, y) \mapsto x^3 + y^3$ et $(x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2$ sont polynomiales donc continues. La f fonction est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ comme quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

Pour montrer la continuité en $(0, 0)$, on utilise les coordonnées polaires. On considère $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) \neq (0, 0)$, on note $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ et $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(0, 0)| &= \left| \frac{r^3 \cos^3 \theta + r^3 \sin^3 \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin \theta \cos \theta + r^2 \sin^2 \theta} \right| = r |\cos^3 \theta + \sin^3 \theta| \left| 1 + \frac{\sin(2\theta)}{2} \right| \leq 4r \\ &\xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0 = f(0, 0) \end{aligned}$$

On en déduit que $f(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow 0} f(0, 0)$. La fonction f est donc continue en $(0, 0)$ et donc continue sur $\mathbb{R}^2$.

Les fonctions $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ et $(x, y) \mapsto xy$ sont polynomiales donc continues. Par composition avec $t \mapsto \sqrt{|t|}$ qui est continue, on obtient que $(x, y) \mapsto \sqrt{|xy|}$ est continue.

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

En $(0, 0)$, un passage en coordonnées polaires donne :

$$|g(x, y) - g(0, 0)| = \frac{r \sqrt{|\cos \theta \sin \theta|}}{r^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{|\sin(2\theta)|}}{r}$$

Ceci laisse penser que la fonction g ne doit pas être continue en 0 et que l'on doit trouver des limites différentes pour $(x, y) = (x, 0)$ et $(x, y) = (x, x)$. En effet :

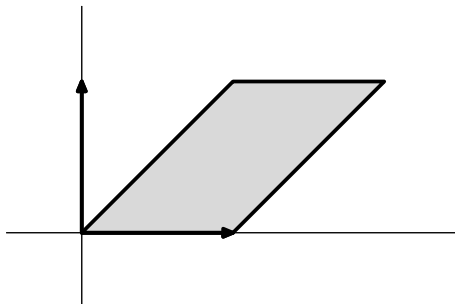
$$\begin{aligned} g(x, 0) &= 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \\ g(x, x) &= \frac{|x|}{x^2} = \frac{|x|}{x} \cdot \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty \end{aligned}$$

Cette dernière limite à elle seule montre que g n'est pas continue en $(0, 0)$.

Exercice 7. Démontrer que la fonction $f : (x, y) \mapsto xy + x + y$ admet un maximum sur l'ensemble :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, y \leq x \text{ et } y \geq x - 1\}$$

Réponse. Ensemble A en gris ci-dessous.



Soit $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ suite d'éléments de A qui converge vers $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a alors :

$$\begin{aligned} x_n &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \\ \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq y_n \leq 1 \\ y_n &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b \\ \forall n \in \mathbb{N}, y_n \leq x_n \leq y_n + 1 \end{aligned}$$

Par passage à la limite dans les inégalités larges, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 \leq y \leq 1 \\ y \leq x \leq y + 1 \end{aligned}$$

On obtient donc $(a, b) \in A$. Par caractérisation séquentielle, A est fermé. Soit $(x, y) \in A$, on a $0 \leq y \leq x$ donc x et y sont positifs et ainsi :

$$\|(x, y)\|_2^2 = x^2 + y^2 \leq (y+1)^2 + y^2 = 2y^2 + 2y + 1 \leq 5$$

On en déduit que A est bornée. La fonction f est polynomiale donc continue. L'espace $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie donc f est bornée et atteint ses bornes sur A ; en particulier f admet un maximum sur A .

Exercice 8. On considère l'ensemble :

$$A = \left\{ P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}_n[X] \mid \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, |a_i| \leq 1 \right\}$$

et on suppose que $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que, pour tout $P \in A$, $f(P) > 0$. Démontrer qu'il existe un réel $m > 0$ tel que, pour tout $P \in A$, $f(P) \geq m$.

Quelques problème utilisant la topologie

Problème 9 (*Démonstration topologique de l'existence d'une solution*). Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie, K une partie fermée et bornée de E et $f : K \rightarrow K$ telle que :

$$\forall x, y \in K, x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$$

Démontrer que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution dans K .

Problème 10 (*Densité et continuité : une formule de déterminant par blocs*). On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On pose $A_n = A - 2^{-n}I_p$ pour $n \in \mathbb{N}$.

(1) Déterminer la limite de la suite $(A_n)_{n \geq 0}$.

(2) Démontrer que $A_n \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ à partir d'un certain rang.

Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telles que $AC = CA$.

(3) On suppose A inversible. Calculer le produit par blocs :

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & -C \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

et en déduire une expression de $\det \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$.

(4) On ne suppose plus A inversible. Déterminer une expression de $\det \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$.

Problème 11 (*Densité et continuité : le théorème de Cayley-Hamilton*).

(1) Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, l'application :

$$\begin{aligned} f_k : \mathcal{M}_p(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathbb{C} \\ M &\mapsto \det(M - kI_p) \end{aligned}$$

est continue.

(2) Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C}_p[X] &\rightarrow \mathbb{C}^{p+1} \\ Q &\mapsto \begin{pmatrix} Q(0) \\ \vdots \\ Q(p) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est bijective et sa réciproque est continue.

(3) Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} \chi : \mathcal{M}_p(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathbb{C}_p[X] \\ M &\mapsto \chi_M \end{aligned}$$

est continue.

(4) Soit $T = (t_{ij}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la matrice :

$$T_n = \begin{pmatrix} t_{11} + \frac{1}{n} & & & \\ & t_{22} + \frac{2}{n} & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_{pp} + \frac{p}{n} \end{pmatrix} = T + \text{diag}\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{p}{n}\right)$$

Démontrer que $T_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} T$ et qu'à partir d'un certain rang les coefficients diagonaux de T_n sont deux à deux distincts.

(5) Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

(6) Démontrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ diagonalisable, le polynôme caractéristique de A est un polynôme annulateur de A .

(7) Démontrer le théorème de Cayley-Hamilton.

Indications

Ex 1. Méthodes du cours.

Ex 2. Que peut-on dire des applications $f : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(0)$ et $g : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto \int_0^1 P(t) dt$?

Ex 3. Que peut-on dire des applications $x \in E \mapsto \|x - a_k\|$?

Ex 4. (a) Polynôme caractéristique, distinguer des cas. (b) Montrer que E est l'ensemble des couples (x, y) qui vérifient une condition de la forme $f(x, y) > 0$.

Ex 5. Appliquer la définition.

Ex 6. Passage en coordonnées polaires.

Ex 7. Démontrer que l'ensemble A est fermé et borné.

Ex 8. Démontrer que A est fermé et borné et utiliser un théorème du cours.