



TD 12 : Suites de fonctions

Convergence simple, convergence uniforme

Exercice 1. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite (f_n) définie par :

$$f_n(t) = \frac{2^n t}{1 + n2^n t^2}$$

Exercice 2 (Oral Mines Télécom, MP, 2019). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les fonctions f_n et g_n par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = nx e^{-nx^2}$$

$$\text{et } g_n(x) = nx \cos(nx) e^{-nx^2}$$

- (a) Étudier la convergence simple des suites (f_n) et (g_n) sur $\mathbb{R}^+$.
- (b) Pour chaque suite, a-t-on convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$? Sur $[a, +\infty[$ pour $a > 0$?

Exercice 3. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) = \exp(-nx^2)$$

- (a) Étudier la convergence simple puis uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions (f_n) .
- (b) Étudier la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$ fixé.

Exercice 4 (Oral Mines Télécom, PC, 2017). Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f_n(x) = \frac{1}{\text{ch}(x^n)}$$

- (a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (b) La convergence est-elle uniforme ?

Exercice 5. Pour $n \geq 1$, on définit la fonction :

$$f_n : x \in [0, 1] \mapsto \frac{n(x^3 + x)e^{-x}}{nx + 1}$$

- (a) Étudier la convergence simple puis la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[0, 1]$.
- (b) Étudier la convergence uniforme sur $[a, 1]$ avec a fixé, $0 < a < 1$.

Exercice 6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n(x) = \sqrt{n} \sin x (\cos x)^n$.

- (a) Existence et calcul de $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} f_n$ et de $\int_0^{\pi/2} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$.
- (b) La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, \pi/2]$?

Réponse. Considérons $x \in [0, \pi/2]$. On note que $f_n(0) = 0$ et $f_n(\pi/2) = 0$. Ensuite, si $0 < x < \pi/2$, alors avec les croissances comparées :

$$f_n(x) = \sin(x) n^{1/2} \exp(n \ln(\cos(x))) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

La suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, \pi/2]$. Par un calcul direct de primitives, on a :

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{n} \sin x \cos^n x \, dx = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 = \int_0^{\pi/2} (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n)$$

La fonction f_n est positive et dérivable sur $[0, \pi/2]$ et en dérivant on obtient le maximum de f_n :

$$f_n\left(\arctan \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-(n+1)/2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1/2}$$

La convergence n'est donc pas uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 7 (Oral CCP, PSI, 2022). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f_n(x) = x(1 + n^\alpha e^{-nx})$$

- Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f à préciser.
- Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la convergence est uniforme.
- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x(1 + \sqrt{n}e^{-nx}) dx$.

Problème 8 (Propriétés avec la convergence simple). On considère une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ de fonctions définie au moins sur un intervalle I et qui converge simplement vers une fonction f définie sur I .

- Démontrer que si chaque fonction f_n est croissante sur I , alors f est croissante sur I .
- Démontrer que si chaque fonction f_n est convexe sur I , alors f est convexe sur I .
- On suppose que chaque fonction f_n est monotone sur I . La fonction f est-elle nécessairement monotone sur I ?

Problème 9 (Introduction aux séries de fonctions). Pour $n \geq 1$, on définit la fonction :

$$f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^2 + x^2}$$

- Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f .
- Démontrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Problème 10 (Suite de fonctions définie par récurrence). Soit $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et positive. On définit une suite de fonctions (f_n) en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1}(x) = \ln(1 + f_n(x))$$

- Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(f_n(x))$ est bien définie et décroissante.
- Montrer que la suite de fonctions (f_n) est bien définie et converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction à préciser.
- Montrer que la convergence est uniforme.

Problème 11 (Somme et produit de suites uniformément convergentes). Soient (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions définies sur un même intervalle I . On suppose que la suite (f_n) converge uniformément sur I vers f et que la suite (g_n) converge uniformément sur I vers g .

- Démontrer que la suite $(f_n + g_n)$ converge uniformément sur I vers $f + g$.
- Démontrer que si f et g sont bornées sur I , alors la suite $(f_n \times g_n)$ converge uniformément vers $f \times g$ sur I .
- On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto x + \frac{1}{n}$$

$$g_n : x \in \mathbb{R} \mapsto x$$

Démontrer que les suites de fonctions (f_n) et (g_n) convergent uniformément sur $\mathbb{R}$, que la suite de fonctions $(f_n \times g_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et que cette dernière convergence n'est pas uniforme.

Réponse. Pour simplifier, on note $\|\cdot\|_\infty$ à la place de $\|\cdot\|_{\infty, I}$.

- On suppose que (f_n) et (g_n) convergent uniformément vers f et g sur I . Par définition, $f_n - f$ et $g_n - g$ sont bornées *apcr*. Ainsi, $f_n + g_n - (f + g)$ est bornée *apcr* (somme de deux fonctions bornées) et on a :

$$\|f_n + g_n - (f + g)\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty + \|g_n - g\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On en déduit que la suite de fonctions $(f_n + g_n)$ converge uniformément vers $f + g$ sur I .

- (b) On suppose f et g bornées sur I . Comme $f_n - f$ est bornée *apcr*, $f_n = (f_n - f) + f$ est bornée *apcr*. Il en est de même de g_n . On a alors :

$$\begin{aligned}\|f_n g_n - f g\|_\infty &= \|f_n g_n - f_n g + g f_n - f g\|_\infty = \|f_n(g_n - g) + g(f_n - f)\|_\infty \\ &\leq \|f_n(g_n - g)\|_\infty + \|g(f_n - f)\|_\infty\end{aligned}$$

Or, de manière générale, pour deux fonctions u et v bornées sur I , on a :

$$\forall x \in I, |u(x)v(x)| = |u(x)| |v(x)| \leq \|u\|_\infty \|v\|_\infty$$

donc $\|uv\|_\infty \leq \|u\|_\infty \|v\|_\infty$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\|f_n g_n - f g\|_\infty &\leq \|f_n\|_\infty \|g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty \|f_n - f\|_\infty \\ &\leq \underbrace{(\|f_n - f\|_\infty + \|f\|_\infty)}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|f\|_\infty} \underbrace{\|g_n - g\|_\infty}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0} + \|g\|_\infty \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}\end{aligned}$$

Par encadrement, $\|f_n g_n - f g\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc la suite de fonctions $(f_n g_n)$ converge uniformément vers $f g$ sur I .

- (c) En posant $f : x \mapsto x^2$, on obtient directement :

$$\begin{aligned}\|f_n - f\|_{\infty, \mathbb{R}} &= \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ \|g_n - f\|_{\infty, \mathbb{R}} &= 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0\end{aligned}$$

En revanche :

$$f_n(x)g_n(x) - x^2 = \frac{x}{n}$$

La fonction $f_n g_n - f^2$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$ donc la suite de fonctions $(f_n g_n)$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Indications

Ex 1. Convergence simple facile. Étude de fonction pour la convergence uniforme.

Ex 2. Convergences simples : étude facile. Étude de la convergence uniforme pour (f_n) sur $\mathbb{R}^+$ et $[a, +\infty[$: par étude de fonction. Étude de la convergence uniforme pour (g_n) sur $[a, +\infty[$: conséquence de (f_n) . Étude de la convergence uniforme pour (g_n) sur $\mathbb{R}^+$: utiliser $g_n(1/\sqrt{2n})$.

Ex 3. (a) Convergence simple facile. Utiliser la (non) continuité pour la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$. (b) Méthode usuelle pour la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$.

Ex 4. (a) Convergence simple facile à étudier. (b) Utiliser la continuité pour la (non) convergence uniforme.

Ex 5. (a) Convergence simple facile à étudier. Utiliser la continuité pour la (non) convergence uniforme sur $[0, 1]$. (b) Établir une majoration pour la convergence uniforme sur $[a, 1]$.

Ex 6. Convergence simple facile à étudier. L'intégrale de f_n se calcule directement (avec une primitive). Étude de la convergence uniforme avec la méthode usuelle.

Ex 7. (a) Méthode usuelle. (b) On peut expliciter la norme infinie avec une étude de fonction. (c) Utiliser un théorème du cours.

Pb 8. (1) Écrire la définition de f_n est croissante sur I et utiliser la définition de convergence simple. (2) Écrire la définition de f_n est convexe sur I et utiliser la définition de convergence simple. (3)

Pb 9. (1) Étudier la convergence de la série à x fixé. (2) Utiliser un théorème du cours sur les séries numériques pour établir la convergence uniforme pour utiliser le théorème de continuité.

Pb 10. (1) Montrer par récurrence que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ est bien défini et $f_n(x) \geq 0$. Utiliser une inégalité classique sur $\ln$ pour comparer $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$. (2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(f_n(x))$ converge vers une limite finie. Montrer que cette limite est nulle. (3) On pose $M_0 = \|f_0\|_\infty$ et $M_{n+1} = \ln(1 + M_n)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty \leq M_n$. Montrer que (M_n) converge vers 0 et conclure.

Pb 11. (1) Majorer $|f_n(x) + g_n(x) - (f(x) + g(x))|$. (2) Utiliser :

$$f_n \times g_n - f \times g = f_n \times g_n - f \times g_n + f \times g_n - f \times g$$

(3) La fonction $f_n \times g_n - f \times g$ est-elle bornée sur $\mathbb{R}$?