



TD 1 : Révisions (1) – Sous-espaces vectoriels

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, on montrera que F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E connu (à préciser).

$$(1) \quad F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0 \right\}$$

$$(2) \quad F = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(3) \quad F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0 \right\}$$

$$(4) \quad F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \mid a + b + c + d = 0 \right\}$$

$$(5) \quad F = \{P \in \mathbb{K}_n[X] \mid P(0) = P(1)\}$$

$$(6) \quad F = \{aX^2 + bX \mid a, b \in \mathbb{K}\}$$

$$(7) \quad F = \{f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'' + f = 0\}$$

$$(8) \quad F = \{(u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_0 = 0\}$$

$$(9) \quad F = \{(u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = nu_n\}$$

$$(10) \quad F = \{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X]) \mid f(X) = 0\}$$

Exercice 2. Dans chacun des cas suivants, on admet que F est un espace vectoriel et on demande de déterminer une base de F .

$$(1) \quad F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0 \right\}$$

$$(2) \quad F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0 \right\}$$

$$(3) \quad F = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(4) \quad F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0 \right\}$$

$$(5) \quad F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \mid a + b + c + d = 0 \right\}$$

$$(6) \quad F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{K} \right\}$$

$$(7) \quad F = \{f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'' + f = 0\}$$

$$(8) \quad F = \{f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'' = 0\}$$

$$(9) \quad F = \{(u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n\}$$

$$(10) \quad F = \{(u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0\}$$