TD 3 : Séries numériques

Études de convergences

Exercice 1. Étudier la nature des séries $\sum \frac{\ln(n)}{2^n}$, $\sum \sqrt{n}\sin(2n)\mathrm{e}^{-n}$ et $\sum \frac{1}{n}\mathrm{e}^{1/n}$.

Exercice 2. Étudier la nature des séries $\sum \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}$, $\sum \frac{(-1)^n\cos(n)}{n^2+\sqrt{n}}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{n-(-1)^n}$.

Exercice 3. Étudier la convergence, suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln^2 n}{n^\alpha}$.

Réponse. On note pour la suite $u_n = \frac{\ln^2 n}{n^\alpha}$.
On suppose tout d'abord $\alpha > 1$**.** On cherche s'il existe un réel $\gamma > 1$ tel que :

$$\frac{\ln^2 n}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$$

Or, par croissances comparées :

$$\frac{\ln^2 n}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\gamma}\right) \iff \frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-\gamma}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff \alpha-\gamma>0$$

Considérons alors n'importe quel réel γ tel que $1<\gamma<\alpha$ (on peut par exemple prendre $\gamma = (1+\alpha)/2$), on a alors d'après ce qui précède :

$$\frac{\ln^2 n}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$$

Comme $\gamma > 1$, la série de Riemann $\sum 1/n^\gamma$ converge. Par comparaison avec une série à termes positifs, la série $\sum u_n$ converge.
On suppose maintenant $\alpha \leqslant 1$**.** On a :

$$\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{\ln^2 n}{n^\alpha}\right) \quad \text{car} \quad \frac{n^\alpha}{n\ln^2 n} = \frac{1}{n^{1-\alpha}\ln^2 n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

La série de Riemann $\sum 1/n$ diverge. Par comparaison avec une série à termes positifs, la série $\sum u_n$ diverge.
Conclusion. La série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Exercice 4. Étudier la convergence de la série $\sum \frac{1}{n\ln^2 n}$.

Exercice 5. Étudier la convergence, suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, de la série de terme général :

$$u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \alpha\sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 6. Nature suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ de la série de terme général $u_n = \frac{n^n}{n!}\alpha^n$.

Exercice 7. Pour $\alpha > 0$, nature de la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$.

Réponse. On pose :

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$$
$$v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

Par le critère des séries alternées (non rédigé ici), la série $\sum v_n$ converge. Comme $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{n^{2\alpha}} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \quad \text{car } \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\
&= v_n - \frac{1}{n^{2\alpha}} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \\
&= v_n + w_n \quad \text{avec } w_n = -\frac{1}{n^{2\alpha}} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \text{ et donc } w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{n^{2\alpha}}
\end{aligned}$$

On distingue deux cas.

- Si $2\alpha > 1$, alors $\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$ converge donc par comparaison avec une série à termes de signe constant $\sum w_n$ converge donc $\sum u_n$ converge comme somme de deux séries convergentes.
- Si $2\alpha \leqslant 1$, alors $\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$ diverge donc par comparaison avec une série à termes de signe constant $\sum w_n$ diverge donc $\sum u_n$ diverge comme somme d'une série convergente et d'une série divergente.

Exercice 8. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \sin\left(\pi \frac{n^3+1}{n^2+1}\right)$.

Réponse. On remarque que :

$$\pi \frac{n^3+1}{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi$$

mais on ne peut pas appliquer la fonction sin à cet équivalent (on obtiendrait d'ailleurs 0). On peut écrire :

$$\pi \frac{n^3+1}{n^2+1} = \pi \frac{n^3+1}{n^2+1} - n\pi + n\pi = \pi\left(\frac{n^3+1}{n^2+1} - n\right) + n\pi = \pi \frac{1-n}{n^2+1} + n\pi$$

On a alors :

$$u_n = \sin\left(\pi \frac{n^3+1}{n^2+1}\right) = \sin\left(\pi \frac{1-n}{n^2+1} + n\pi\right) = (-1)^n \sin\left(\pi \frac{1-n}{n^2+1}\right)$$

(en effet, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $\sin(\theta + n\pi) = (-1)^n \sin\theta$). On utilise le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\sin x$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^3) = x + \underset{x\to0}{\mathrm{O}}(x^3)$$

Comme $\pi \frac{1-n}{n^2+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on obtient :

$$u_n = (-1)^n \left(\pi \frac{1-n}{n^2+1} + \mathrm{O}\left(\left(\pi \frac{1-n}{n^2+1}\right)^3\right)\right) = (-1)^n \pi \frac{1-n}{n^2+1} + \mathrm{O}\left(\left(\pi \frac{1-n}{n^2+1}\right)^3\right)$$

Or $\pi\dfrac{1-n}{1+n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-\pi}{n}$ donc :

$$\begin{aligned} u_n &= (-1)^n \pi \frac{1-n}{n^2+1} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= v_n + w_n \quad \text{avec} \quad v_n = (-1)^n \pi \frac{1-n}{n^2+1}, \quad w_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

Pour $n \geqslant 1$:

- $(-1)^n v_n = \pi \dfrac{1-n}{n^2+1} \leqslant 0$;
- $|v_n| = \pi \dfrac{|n-1|}{n^2+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$;
- $|v_{n+1}| - |v_n| = \dfrac{n}{(n+1)^2+1} - \dfrac{n-1}{n^2+1} = \dfrac{-n^2+n+2}{((n+1)^2+1)(n^2+1)} \leqslant 0$ *apcr* (après calcul).

D'après le théorème des séries alternées, la série $\sum v_n$ converge. Comme $|w_n| = \mathrm{O}(1/n^3)$ et la série de Riemann $\sum 1/n^3$ converge, on en déduit par comparaison de séries à termes positifs que la série $\sum w_n$ converge absolument donc converge. Par conséquent, la série $\sum u_n$ converge comme somme de deux séries convergentes.

Calculs de sommes

Exercice 9 *(Oral Mines-Ponts, PC, 2005).* Condition nécessaire et suffisante sur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pour que la série de terme général

$$u_n = a\ln(n) + b\ln(n+1) + c\ln(n+2)$$

converge. Calculer alors sa somme.
Réponse. On utilise le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\ln(1+x)$:

$$\begin{aligned} u_n &= a\ln n + b\ln n + b\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + c\ln n + c\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \\ &= (a+b+c)\ln n + b\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + c\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \\ &= (a+b+c)\ln n + \frac{2c+b}{n} - \frac{4c+b}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= (a+b+c)\ln n + \frac{2c+b}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Supposons $a+b+c \neq 0$**.** On a alors :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (a+b+c)\ln(n)$$
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

La série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
Supposons $a+b+c=0$ **et** $2c+b \neq 0$**.** Alors :

$$u_n = \frac{2c+b}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2c+b}{n}$$

La série $\sum 1/n$ diverge donc par comparaison avec une série à termes de signe constant, la série $\sum u_n$ diverge.

Supposons $a+b+c=0$ et $2c+b=0$, c'est à dire $c=a$ et $b=-2a$. Alors :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La série $\sum 1/n^2$ converge donc par comparaison avec une série à termes positifs, $\sum u_n$ converge.
Supposons toujours $a+b+c=0$ et $2c+b=0$, c'est à dire $c=a$ et $b=-2a$. Alors :

$$u_n = a\left(\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)-2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = a\left(\ln\frac{n}{n+1}+\ln\frac{n+2}{n+1}\right)$$

Ensuite :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = a\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{k+1}+a\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k+2}{k+1} = a\ln\frac{1}{n+1}+a\ln\frac{n+2}{2} = -a\ln(n+1)+a\ln(n+2)-a\ln 2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -a\ln 2$$

Conclusion. La série converge si, et seulement si, $a+b+c=0$ et $2c+b=0$ et, lorsque c'est le cas, sa somme est $-a\ln 2$.

Exercice 10. Déterminer la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(n+1)q^n$.

Exercice 11. *On rappelle qu'il existe $\gamma\in\mathbb{R}$ tel que* $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln(n)+\gamma+\underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(1)$.

(a) Démontrer que $\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. (b) En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Réponse. On note $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. On sait que $H_n = \ln(n)+\gamma+\underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(1)$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \sum_{1\leqslant k\leqslant 2n}\frac{1}{k}-2\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n\\ k\text{ pair}}}\frac{1}{k}\\
&= \sum_{1\leqslant k\leqslant 2n}\frac{1}{k}-2\sum_{1\leqslant p\leqslant n}\frac{1}{2p}\\
&= \sum_{1\leqslant k\leqslant 2n}\frac{1}{k}-\sum_{1\leqslant p\leqslant n}\frac{1}{p}\\
&= H_{2n}-H_n\\
&= \ln(2n)+\gamma+\mathrm{o}(1)-\ln(n)-\gamma+\mathrm{o}(1)\\
&= \ln(2)+\mathrm{o}(1)\\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2
\end{aligned}$$

La somme de la série est $\ln(2)$.

Exercice 12. *On rappelle que* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

(a) Démontrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{4k^2}-\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$. (b) En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

Réponse. On a pour $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^n}{n^2} &= \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant 2N\\ n \text{ pair}}} \frac{(-1)^n}{n^2} + \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant 2N\\ n \text{ impair}}} \frac{(-1)^n}{n^2}\\ &= \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant 2N\\ n \text{ pair}}} \frac{1}{n^2} - \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant 2N\\ n \text{ impair}}} \frac{1}{n^2}\\ &= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(2k)^2} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(2k-1)^2}\end{aligned}$$

Et en faisant tendre N vers $+\infty$, ce qui est légitime car les séries sont convergentes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

Sur le même principe :

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{24} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

On en déduit :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

et ainsi :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{24} - \frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Estimations sommes partielles, restes, approximation somme

Exercice 13. Démontrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ où on a posé, pour $n \geqslant 1$,

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^n}}$$

Déterminer une valeur approchée de la somme de cette série à 10^{-3} près.

Exercice 14. Nature de la série $\sum u_n$ avec $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 15. Nature de la série $\sum u_n$ avec $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k}$.

Réponse. Avec la quantité conjuguée :

$$(-1)^n \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} = (-1)^n \frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

Avec le théorème des séries alternées (non rédigé ici) :

$$|u_n| \leqslant \frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

La série $\sum 1/n^{3/2}$ converge donc, par comparaison avec une série à termes positifs, la série $\sum u_n$ converge absolument donc converge.

Exercice 16. Calculer $\left\lfloor \sum_{n=1}^{10^{12}} \frac{1}{\sqrt{n}} \right\rfloor$ (partie entière).

Lien suite séries

Exercice 17. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par : $u_0 \in]0,1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_n^2)$.

(a) Établir la monotonie et la convergence de la suite (u_n). Déterminer sa limite.

(b) Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

(c) On définit la suite (v_n) en posant $v_n = \ln(2^n u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Établir la convergence de la série $\sum(v_{n+1} - v_n)$.

(d) En déduire qu'il existe $K > 0$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} K/2^n$.

Réponse. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} u_n(u_n - 1)$$

Or, par une récurrence immédiate, on a $0 < u_n < 1$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, la suite (u_n) est décroissante et minorée donc convergente. On note ℓ sa limite, alors $\ell \in [0, u_0] \subset [0,1[$ et $2\ell = \ell + \ell^2$ donc $\ell \in \{0,1\}$ et comme $\ell \neq 1$ on a $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$ et :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1+u_n}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$

Par le critère de d'Alembert, la série $\sum u_n$ converge. Ensuite :

$$v_{n+1} - v_n = \ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$$

Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{n\geqslant 0}(v_{n+1} - v_n)$ converge. Par télescopage, la suite (v_n) converge vers une limite $k \in \mathbb{R}$ et la suite $(2^n u_n)$ converge vers une limite $K = \mathrm{e}^k > 0$.

Exercice 18 *(Oral Mines-Ponts, PSI, 2005)*. Étudier la suite $u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} - \ln(\ln n)$.

Réponse. On pose $v_n = u_n - u_{n-1}$, pour $n \geqslant 3$:

$$\begin{aligned} v_n = u_n - u_{n-1} &= \frac{1}{n\ln n} - \ln(\ln n) + \ln(\ln(n-1)) = \frac{1}{n \ln n} + \ln\left(\frac{\ln(n-1)}{\ln n}\right) \\ &= \frac{1}{n\ln n} + \ln\left(\frac{\ln(n(1-1/n))}{\ln n}\right) = \frac{1}{n\ln n} + \ln\left(1 + \frac{\ln(1-1/n)}{\ln n}\right) \end{aligned}$$

On utilise le DL(0) de $\ln(1+x)$ sous la forme $\ln(1+x) = x + \underset{x\to 0}{\mathrm{O}}(x^2)$:

$$v_n = \frac{1}{n\ln n} + \frac{\ln(1-1/n)}{\ln n} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\left(\frac{\ln(1-1/n)}{\ln n}\right)^2\right)$$

ou encore, puisque $\frac{\ln(1-1/n)}{\ln n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n\ln n}$:

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{n\ln n} + \frac{\ln(1-1/n)}{\ln n} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\left(\frac{1}{n\ln n}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{n\ln n} + \frac{\ln(1-1/n)}{\ln n} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Utilisons à nouveau $\ln(1+x) = x + \underset{x\to 0}{\mathrm{O}}(x^2)$:

$$v_n = \frac{1}{n\ln n} - \frac{1}{n\ln n} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right) + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On a donc $|v_n| = \mathrm{O}(1/n^2)$. La série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} n^{-2}$ converge donc, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 3} v_n$ converge absolument, donc converge. La série $\sum(u_n - u_{n-1})$ converge donc d'après le cours la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ converge.

Suppléments

Exercice 19. Soit $\theta \in \mathbb{R}$; on pose pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.

(1) Calculer S_n et montrer que la suite (S_n) est bornée.

(2) Démontrer que pour tout entier $N \geqslant 2$, on a $\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{S_n}{n(n+1)} + \frac{S_N}{N}$.

(3) En déduire la nature de la série $\sum \frac{\sin(n\theta)}{n}$.

Réponse.

(1) On considère $\theta \in \mathbb{R}$. En utilisant les formules d'Euler :

$$S_n = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\right)$$

On voit apparaitre la somme des termes d'une suite géométrique. Pour la calculer, on suppose tout d'abord $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 1$ c'est à dire θ non multiple de 2π. On obtient :

$$\begin{aligned}
S_n &= \mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta/2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1)\theta/2}\right)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}\right)}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta/2}\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right) \\
&= \frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}
\end{aligned}$$

On en déduit alors :

$$|S_n| \leqslant \frac{1}{|\sin\frac{\theta}{2}|}$$

Ceci est vrai quel que soit $n \in \mathbb{N}$ et le majorant est indépendant de n, par conséquent la suite (S_n) est bornée. Si θ est multiple de 2π, alors la suite (S_n) est constante égale à 0, elle est donc également bornée.

(2) On écrit $\sin(n\theta) = S_n - S_{n-1}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(n\theta)}{n} &= \sum_{n=1}^{N} \frac{S_n - S_{n-1}}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{S_n}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{S_{n-1}}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{S_n}{n} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{S_n}{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{S_n}{n} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{S_n}{n+1} \\
&= \frac{S_N}{N} + \sum_{n=1}^{N} \frac{S_n}{n(n+1)} \\
&= \frac{S_N}{N} + T_N \quad \text{avec } T_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{S_n}{n(n+1)}
\end{aligned}$$

Comme (S_N) est bornée, on a :

$$\frac{S_N}{N} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

Comme (S_n) est bornée, on a :

$$\frac{S_n}{n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La série $\sum 1/n^2$ converge donc par comparaison avec une série à termes positifs, la série $\sum S_n/(n(n+1))$ converge. La suite (T_n) possède donc une limite finie. La suite (u_N) définie par :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \ u_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(n\theta)}{n}$$

est donc convergente comme somme de deux suites convergentes. On en déduit que la série de terme général $S_n/(n(n+1))$ converge.

Exercice 20 *(Oral Centrale, PC, 2022 (partiel)).* On note T l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont tous les termes sont dans $\{0,1,2\}$. Pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ élément de T, on pose

$$\sigma(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{3^n}$$

(a) Montrer que la fonction σ est bien définie.
(b) On définit deux éléments u et v de T par

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad v_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 1 \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

À l'aide de ces deux suites, étudier l'injectivité de σ.

Indications

Ex 1. Méthodes usuelles du cours.

Ex 2. Méthodes usuelles du cours.

Ex 3. Distinguer différents cas pour α et comparer à une série de Riemann.

Ex 4. Utiliser une comparaison avec une intégrale.

Ex 5. Utiliser les DL de $\ln(1+x)$ et $\sin(x)$ pour obtenir un développement asymptotique de u_n.

Ex 6. Règle de d'Alembert. Il faut trouver une autre méthode pour traiter les cas où la règle de d'Alembert ne permet pas de conclure.

Ex 7. Établir un développement asymptotique de u_n en utilisant le DL de $\ln(1+x)$.

Ex 8. Justifier que $u_n = (-1)^n \sin\left(\pi \dfrac{1-n}{n^2+1}\right)$ puis obtenir un développement asymptotique de u_n.

Ex 9. Convergence : mettre n en facteur dans chaque ln pour obtenir un développement asymptotique de u_n. Calcul de la somme : écrire une somme partielle et effectuer des simplifications.

Ex 10. Écrire le produit de Cauchy de la série géométrique $\sum q^n$ avec elle-même.

Ex 11. (a) On peut retrancher de chaque côté $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$. (b) Écrire $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ à l'aide des $H_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$. Utiliser le rappel.

Ex 12. (a) Séparer les indices pairs et impairs. (b) Que vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$?

Ex 13. Théorème des séries alternées.

Ex 14. Encadrer u_n à l'aide d'intégrales.

Ex 15. Justifier que $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$. Théorème des séries alternées.

Ex 16. Encadrer cette somme partielle à l'aide d'intégrales.

Ex 17. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$. (b) Règle de d'Alembert. (c) Déterminer un développement asymptotique de $v_{n+1} - v_n$.

Ex 18. Étudier la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$.

Ex 19. (1) Écrire $\sin(k\theta)$ à l'aide de $\mathrm{e}^{ki\theta}$ pour calculer la somme et en déduire que la suite (S_n) est bornée. (2) Écrire $\sin(n\theta) = S_n - S_{n-1}$. (3) Que dire de la suite de terme général S_N/N ? Que dire de la série de terme général $S_n/(n(n+1))$?

Ex 20. (a) Comparaison avec une série de référence. (b) Calculer $\sigma(u)$ et $\sigma(v)$ et conclure.

Exercice 20 : Proposition de correction

On note $T = \{ (U_n)_{n\in\mathbb{N}^*},\ U_n \in \{0,1,2\} \}$

Soit $U \in T$;

$$\sigma(U) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{U_n}{3^n}$$

a) Montrons que σ est bien définie :

On considère la série $\sum_{n=2} \frac{U_n}{3^n}$, avec $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in T$

<u>1ère approche</u> (par comparaison) :

Etant donné que $U \in T$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \leq 3$

$$\Rightarrow \frac{U_n}{3^n} \leq \frac{3}{3^n} \qquad \text{car } 3^n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

or $\sum \left(\frac{1}{3}\right)^n$ est une série géométrique convergente ~~donc~~ car $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$ donc par linéarité, $\sum \frac{3}{3^n}$ est convergente.

de plus il va de soi que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{U_n}{3^n} \geq 0$, Donc d'après le théorème ~~de~~ comparaison

$$\boxed{\sum_{\cancel{n=1}} \frac{U_n}{3^n} \text{ est convergente.}}$$

$n \geq 1$

<u>2ème approche</u> :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\exists\, \alpha \in \{0,1,2\}$, $U_n = \alpha$

donc $\frac{U_n}{3^n} = \frac{\alpha}{3^n}$ $\quad$ ($\sum \left(\frac{1}{3}\right)^n$ converge déjà vu.)

Donc par linéarité $\sum_{n=1} \frac{\alpha}{3^n}$ converge

Donc, $\boxed{\sum_{n=2} \frac{u_n}{3^n} \text{ converge. Donc il est légitime que } \sigma \text{ soit définie}}$

b) On définit, $u, v \in T$ par :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $v_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 1 \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$

Etudions l'injectivité de σ

* Raisonnons par contraposition :

on note $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n \neq v_n$

Donc $u \neq v$

Deplus $\sigma(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{3^n}$ et $\sigma(v) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{v_n}{3^n}$

~~Pour $n \neq 1$, $\sigma(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{}$~~

~~Pour $n = 1$, σ~~

~~$\sigma(u) = \frac{1}{3} + \sum_{n=2}^{+\infty}$~~

On note $S_u = \sum_{n=2}^{N} \frac{u_n}{3^n}$, $S_v = \sum_{n=1}^{N} \frac{v_n}{3^n}$

$S_u = \frac{u_1}{3} + \sum_{n=2}^{N} \frac{u_n}{3^n}$ et $S_v = \sum_{n=2}^{N} \frac{v_n}{3^n}$, car $v_0 = 0$

$= \frac{u_1}{3} + \sum_{n=2}^{N} 0$ et $S_v = \sum_{n=2}^{N} \frac{2}{3^n}$

$S_u = \frac{u_1}{3}$ et $S_v = 2 \times \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$= 2 \times \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{N-1}}{1 - \frac{1}{3}} \right)$

Donc $S_u = \frac{1}{3}$ et $S_v = 3 - \frac{1}{3^{N-2}}$

$\lim\limits_{N \to +\infty} S_u = \frac{1}{3}$ et $\lim\limits_{N \to +\infty} S_v = 3$

donc $\sigma(u) \neq \sigma(v)$

Cependant on ne peut conclure car u et v ne sont pas quelconques !!

Comme étudié en classe :

$\sigma(u) = \sigma(v) = \frac{1}{3}$ après calcul

et $u \neq v$ donc σ n'est pas injective

EXERCICE 6 $\sum U_n$ avec $U_n = \frac{n^n}{n!}\alpha^n$ $\alpha \in \mathbb{R}$

→ pour $\alpha = 0$, $U_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ donc $\sum U_n$ CV

→ pour $\alpha \neq 0$, $|U_n| > 0$

$$\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \left|\frac{(n+1)^{n+1}\alpha^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n \alpha^n}\right|$$

$$= \left|\frac{(n+1)^n \alpha}{n^n}\right|$$

$$= \left|\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \alpha\right|$$

$$= \left|\exp\left(n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)\alpha\right|$$

$n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ car $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

donc $\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |\alpha| e$

d'après la règle de d'Alembert :

si $|\alpha|e < 1 \Leftrightarrow |\alpha| < e^{-1}$, $\sum|U_n|$ CV donc $\sum U_n$ CV

si $|\alpha|e > 1 \Leftrightarrow |\alpha| > e^{-1}$, $\sum|U_n|$ DVG donc $\sum U_n$ DVG

si $|\alpha|e = 1 \Leftrightarrow |\alpha| = e^{-1}$, $\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc on ne peut pas conclure

avec la règle de d'Alembert
Il faut utiliser une autre méthode
cf explications données en classe