TD 14 : Séries de fonctions

Propriétés de la fonction somme

Exercice 1. On note f la somme de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ avec :

$$\forall n \geqslant 1,\ f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^x}$$

(a) Déterminer le domaine de définition D de f et montrer que f est continue sur D.
(b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 2. On note f la somme de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ avec :

$$\forall n \geqslant 1,\ f_n : x \mapsto (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \arctan \frac{x}{\sqrt{n}}$$

(a) Démontrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
(b) Démontrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 *(D'après oral Mines Télécom, PSI, 2019)*. On définit pour $n \geqslant 1$:

$$f_n : x \mapsto \frac{\arctan(nx)}{n^2}$$

(a) Démontrer que la somme f de la série de fonctions $\sum f_n$ est définie et de classe C^2 sur $\mathbb{R}^{+*}$.
(b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Réponse. Pour tout $n \geqslant 1$, f_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x > 0,\ f_n(x) = \frac{\arctan(nx)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{et } \sum \frac{1}{n^2} \text{ converge}$$
$$f_n'(x) = \frac{1}{n(1+n^2x^2)} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad \text{et } \sum \frac{1}{n^3} \text{ converge}$$

Les séries $\sum f_n$ et $\sum f_n'$ convergent donc simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$. On a :

$$\forall x > 0,\ f_n''(x) = \frac{-2nx}{(1+n^2x^2)^2}$$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b > a > 0$, on a :

$$\forall n \geqslant 1,\ \forall x \in [a,b],\ \left|f_n''(x)\right| = \frac{2nx}{(1+n^2x^2)^2} \leqslant \frac{2nb}{(1+n^2a^2)^2} \leqslant \frac{2b}{n^3a^4} \quad (\text{indép. de } x)$$

et donc :

$$\|f_n''\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \frac{2b}{n^3a^4} \quad \text{et } \sum \frac{1}{n^3} \text{ converge}$$

On en déduit que $\sum f_n'$ converge normalement sur $[a,b]$. D'après le théorème de classe C^2, f est de classe C^2 sur $[a,b]$. Ceci est vrai quel que soit $[a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, la fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^{+*}$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall n \geqslant 1,\ \left|f_n(x)\right| = \frac{\arctan(nx)}{n^2} \leqslant \frac{\pi}{2n^2} \quad (\text{indép. de } x)$$

donc :

$$\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}^{+*}} \leqslant \frac{\pi}{2n^2} \quad \text{et} \sum \frac{1}{n^2} \text{ converge}$$

On en déduit que $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^{+*}$. Par ailleurs :

$$\forall n \geqslant 1,\ f_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2n^2}$$

D'après le théorème de la double limite :

$$f(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2n^2} = \frac{\pi^3}{12}$$

Exercice 4 *(D'après oral CCP, PC, 2019).* On définit pour $n \geqslant 1$:

$$u_n : x > 0 \mapsto \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$$

Démontrer que la somme u de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 5 *(Oral ENS).* Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$ n'est pas dérivable en 0.

Réponse. On note que la série est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. On a $f(0) = 0$. On va démontrer que f n'est pas dérivable en 0 en démontrant que le taux d'accroissement

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}$$

ne tend pas vers une limite finie lorsque $x \to 0$. Posons $x_N = \pi/2^{N+1}$:

$$f(x_N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(2^n x_N)}{2^n}$$

Or :

$$\begin{aligned}
2^n x_N &= \frac{\pi}{2^{N+1-n}} \leqslant \frac{\pi}{2} \\
\sin(2^n x_N) &\geqslant 2^n x_N \times \frac{2}{\pi} = \frac{1}{2^{N-n}} \\
\frac{\sin(2^n x_N)}{2^n} &\geqslant \frac{1}{2^N} \\
f(x_N) &\geqslant \frac{N}{2^N} \\
\frac{f(x_N)}{x_N} &\geqslant \frac{N}{2^N} \times \frac{2^{N+1}}{\pi} \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty
\end{aligned}$$

alors que $x_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$. Ceci montre que f n'est pas dérivable en 0.

Échange série intégrale

Exercice 6. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t \,\mathrm{d}t$ et on définit :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Montrer que f est définie au moins sur $]-1,1[$ et calculer sa somme.

Réponse. On posera $I =]-1,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a par croissance de l'intégrale :

$$0 \leqslant a_n \leqslant \int_0^{\pi/2} 1 \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

donc la suite (a_n) est clairement bornée. Ainsi, pour $x \in I$:

$$\left|a_n x^n\right| = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(|x|^n\right)$$

La série géométrique $\sum |x|^n$ converge donc, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum a_n x^n$ converge absolument donc converge. On en déduit que $f(x)$ est bien définie pour $x \in I$; la fonction f est donc définie au moins sur I. On fixe $x \in I$ et on considère pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction :

$$g_n : t \mapsto x^n \cos^n t$$

de sorte que :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} g_n(t) \,\mathrm{d}t$$

On veut donc réaliser l'échange de la série et de l'intégrale. Notons qu'ici la variable considérée est t (variable d'intégration), on peut considérer que l'on travaille avec un $x \in I$ fixé. Les fonctions g_n sont continues sur $[0,\pi/2]$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \left|g_n(t)\right| \leqslant |x|^n$$

La série géométrique $\sum |x|^n$ converge donc la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} g_n$ converge normalement sur $[0,\pi/2]$. On applique le théorème d'échange série intégrale sur le segment $[0,\pi/2]$ avec convergence uniforme :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} g_n(t) \,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos^n t\right) \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x\cos t} \,\mathrm{d}t$$

Il ne reste plus qu'à calculer l'intégrale. On réalise le changement de variable $u = \tan(t/2)$ de classe C^1 sur l'intervalle $[0,\pi/2]$, on a :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}(1+u^2)$$

et de plus :

$$\cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

donc :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{2}{1+u^2} \cdot \frac{1}{1 - x\frac{1-u^2}{1+u^2}} \,\mathrm{d}u = \frac{2}{1+x} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + \frac{1-x}{1+x}} = \frac{2}{1+x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \arctan \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

(après calculs).

Exercice 7. Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ une série absolument convergente et :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$$

Démontrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et calculer, pour $p \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\,\mathrm{d}x$.

Limites et équivalents aux bornes

Exercice 8 *(D'après oral CCP, PSI, 2005)*. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}$.

(a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
(b) Justifier que f admet une limite finie en $+\infty$ et une limite en 0.
(c) Trouver des équivalents simples de f en $+\infty$ et en 0.

Exercice 9. On considère pour $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$.

(a) Montrer que la série de fonctions converge simplement sur $]0,+\infty[$. On note f sa somme.
(b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
(c) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$ en faisant intervenir la constante $C = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Exercice 10. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x \ln(n)}$.

(a) Démontrer que f est définie au moins sur $]1,+\infty[$.
(b) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Réponse. Pour $x > 1$:

$$\frac{1}{n^x\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^x}\right) \quad \text{et } \sum \frac{1}{n^x} \text{ converge}$$

Par comparaison de séries à termes positifs, la série de fonctions converge simplement sur $]1,+\infty[$ donc f est définie (au moins) sur $]1,+\infty[$. On a :

$$f(x) = \frac{1}{2^x\ln(2)} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^x\ln(n)}$$

$$2^x f(x) = \frac{1}{\ln(2)} + \sum_{n=3}^{+\infty} \underbrace{\frac{2^x}{n^x\ln(n)}}_{=g_n(x)}$$

Soit $a > 1$. On a :

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall x \in [a,+\infty[,\ \left|g_n(x)\right| = \left|\frac{2^x}{n^x\ln(n)}\right| \leqslant \frac{2^a}{n^a\ln(n)} \quad \text{(indép. de } x\text{)}$$

On a alors :

$$\|g_n\|_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant \frac{2^a}{n^a\ln(n)} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^a}\right) \quad \text{et } \sum \frac{1}{n^a} \text{ converge}$$

La série de fonctions $\sum g_n$ converge donc normalement sur $[a,+\infty[$. On a de plus :

$$\forall n \geqslant 3,\ g_n(x) = \frac{2^x}{n^x\ln(n)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

donc d'après le théorème de la double limite :

$$2^x f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{\ln 2}$$
$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^x \ln 2}$$

Exercice 11 *(D'après oral Mines-Ponts, PC, 2018).* Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, +\infty[$, on pose

$$f_n(x) = \frac{x}{(x+n)\sqrt{n}}$$

(1) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
(2) Montrer que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$. On pourra pour cela prouver la minoration

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [n, +\infty[,\ f(x) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}$$

(3) Montrer que $f(x)/x$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Réponse.

(1) Soit $x \in [0, +\infty[$, on a :

$$0 \leqslant f_n(x) = \frac{x}{n^{3/2}} = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

La série numérique $\sum n^{-3/2}$ converge donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum f_n(x)$ converge. Par conséquent, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

(2) Comme f est la somme d'une série à termes positifs :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x > 0,\ f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x}{(x+k)\sqrt{k}} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{(x+k)\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(1+\frac{k}{x}\right)\sqrt{k}}$$

On considère $x \geqslant n$. Dans la somme on a $k \leqslant n$ donc $k \leqslant x$ et $\frac{k}{x} \leqslant 1$ et :

$$\frac{1}{1+\frac{k}{x}} \geqslant 2$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \geqslant n,\ f(x) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}$$

ou mieux :

$$\forall x > 1,\ f(x) \geqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

La série à termes positifs $\sum \frac{1}{\sqrt{k}}$ diverge donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Ainsi, par composition des limites :

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

et donc, par minoration, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

(3) On pose pour $x > 0$:

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)\sqrt{n}}$$

On va démontrer que $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. On propose pour cela trois méthodes.
Méthode 1 : avec le théorème du cours. On a :

$$\forall n \geqslant 1,\ \forall x \in [0,+\infty[,\ \left|\frac{1}{(x+n)\sqrt{n}}\right| \leqslant \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

terme général d'une série convergente. Ensuite :

$$\forall n \geqslant 1,\ \frac{1}{(x+n)\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On en déduit que $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
Méthode 2 : avec un encadrement par intégrales (on le rédige ci-dessous de manière assez succincte). En fait on va uniquement utiliser la majoration par une intégrale. Soit $x > 0$ fixé, on considère la fonction :

$$h : t \mapsto \frac{1}{(x+t)\sqrt{t}}$$

On montre facilement que h est continue, positive et décroissante sur $]0,+\infty[$. On a alors :

$$\forall n \geqslant 2,\ h(n) = \frac{1}{(x+n)\sqrt{n}} \leqslant \int_{n-1}^{n} h(t)\,\mathrm{d}t$$

En ajoutant ces inégalités on obtient :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)\sqrt{n}} \leqslant \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{(x+t)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

Ceci est bien légitime car l'intégrale utilisée est convergente par comparaison avec une intégrale de Riemann. On a donc :

$$g(x) - \frac{1}{x+1} \leqslant \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{(x+t)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

Comme $g(x) \geqslant 0$:

$$0 \leqslant g(x) \leqslant \frac{1}{x+1} + \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{(x+t)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

(cette majoration suffira donc à obtenir la limite). Dans l'intégrale convergente, on réalise le changement de variable $u = \sqrt{t}$ de classe C^1 et bijectif :

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{(x+t)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{x+u^2} = 2\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\arctan\frac{u}{\sqrt{x}}\right]_1^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{x}}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Par encadrement, $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
Méthode 3 : en revenant à la définition de limite. On considère un réel $\varepsilon > 0$. Pour un entier $N \geqslant 1$ on a :

$$g(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(x+n)\sqrt{n}} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)\sqrt{n}}$$

Ces quantités ($g(x)$ ainsi que les deux sommes sont positives). On a :

$$0 \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)\sqrt{n}} \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

Notons R_N ce majorant, c'est le reste d'une série convergente donc il existe un entier N tel que :

$$0 \leqslant R_N \leqslant \varepsilon$$

Cet entier N étant choisi, on a :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(x+n)\sqrt{n}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

car c'est une somme finie de N termes qui tendent vers 0. Par définition, il existe $x_0 > 0$ tel que :

$$\forall x \in [x_0, +\infty[,\ 0 \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(x+n)\sqrt{n}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \qquad\qquad \leqslant \varepsilon$$

En résumé, on a démontré que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 > 0,\ \forall x \in [x_0, +\infty[,\ 0 \leqslant g(x) \leqslant 2\varepsilon$$

Ceci signifie que $g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ (on pouvait considérer $\varepsilon/2$ dans les deux majorations pour obtenir ε à la fin).

Exercice 12 *(D'après oral Polytechnique).* On note

$$u_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n} \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

Étudier le domaine de définition de f. Donner un équivalent de f en 1^-.
Réponse. Pour $x = \pm 1$, les fonctions u_n ne sont pas toutes définies. Pour $|x| > 1$, on a $|x^n| \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ et :

$$u_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n} = \frac{1}{x^{-n}-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} -1$$

La série $\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$ est alors grossièrement divergente. Pour $|x| < 1$, on a $|x^n| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et :

$$|u_n(x)| \underset{n \to +\infty}{\sim} |x|^n$$

qui est le terme général d'une série géométrique convergente puisque $|x| < 1$. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$ est absolument convergente. On en déduit que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $]-1,1[$ et la fonction f est définie sur $]-1,1[$.
Soit $x \in]0,1[$ fixé. On définit la fonction g :

$$g : t \geqslant 1 \mapsto \frac{x^t}{1-x^t}$$

Pour $t' > t \geqslant 1$, $x^{t'} \leqslant x^t$, donc $1 - x^t \leqslant 1 - x^{t'}$ ce qui montre que g est décroissante. Elle est de plus positive et continue sur $[1, +\infty[$ donc :

$$\int_n^{n+1} \frac{x^t}{1-x^t}\, \mathrm{d}t \leqslant u_n(x) = g(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{x^t}{1-x^t}\, \mathrm{d}t$$

L'inégalité de gauche est vraie pour tout $n \geqslant 1$ et celle de droite pour $n \geqslant 2$. En faisant la somme :

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1-x^t}\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \frac{x}{1-x} + \int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1-x^t}\,\mathrm{d}t$$

Avec le changement de variable $u = x^t$, de classe C^1 et bijectif sur $[1, +\infty[$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1-x^t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\ln x}\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1-u} = \frac{\ln(1-x)}{\ln x}$$

et ainsi :

$$\frac{\ln(1-x)}{\ln x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{x}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{\ln x}$$

Posons $t = 1-x$:

$$\frac{\ln(1-x)}{\ln x} = \frac{\ln t}{\ln(1-t)} \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{\ln t}{t}$$
$$\frac{x}{1-x} = \frac{1-t}{t} = \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left(\frac{\ln t}{t}\right)$$

Ainsi :

$$f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\ln(1-x)}{x-1}$$

Calculs de sommes

Exercice 13 *(D'après oral CCP, PSI, 2019)*. On note f la somme de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ avec :

$$\forall n \geqslant 1,\ f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n \mathrm{e}^{-nx}}{n}$$

(a) Démontrer que f est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.
(b) Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour tout $x > 0$ ainsi que la limite de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$.
(c) En déduire l'expression de $f(x)$ pour tout $x > 0$.

Exercice 14. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \mathrm{e}^{-nx}}{n+1/2}$.

(a) Démontrer que f est continue sur $[0, +\infty[$ et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
(b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
(c) À l'aide d'une équation différentielle, calculer f.

Indications

Ex 1. (a) et (b) Méthodes du cours. Pour $a > 0$, montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[a, +\infty[$.

Ex 2. (a) Utiliser le $\mathrm{DL}_3(0)$ de arctan pour la convergence de la série. (b) Méthode du cours, établir la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

Ex 3. (a) Méthode du cours avec convergence normale sur un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$. (b) Théorème de la double limite avec une convergence normale adéquate.

Ex 4. Méthode du cours. Conjecturer une expression de $u_n^{(k)}$. Pour $a > 0$, établir la convergence normale sur $[a, +\infty[$.

Ex 5. Utiliser des taux d'accroissement bien choisis.

Ex 6. Démontrer que $0 \leqslant a_n \leqslant \pi/2$. Justifier que pour tout $x \in]-1, 1[$, la série $\sum a_n x^n$ converge. Pour $x \in]-1, 1[$ fixé, démontrer que l'on peut réaliser l'échange de la série et de l'intégrale (de la variable t). Pour calculer l'intégrale obtenue à la fin, on pourra réaliser le changement de variable $u = \tan(t/2)$.

Ex 7. Continuité : théorème du cours avec convergence normale sur $\mathbb{R}$. Calcul de l'intégrale : théorème d'échange, avec convergence normale sur $\mathbb{R}$.

Ex 8. (a) Méthode du cours. (b) Utiliser la monotonie de f. (c) Équivalent en $+\infty$: deviner de quel équivalent il s'agit puis le justifier. Équivalent en 0 : utiliser un encadrement par intégrales.

Ex 9. (a) Théorème des séries alternées. (b) Théorème des séries alternées également. (c) Deviner quel est l'équivalent puis le justifier.

Ex 10. (a) Comparaison. (b) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} 2^x f(x)$ avec le théorème de la double limite et convergence normale sur $[2, +\infty[$.

Ex 11. (a) Méthode usuelle. (b) Établir la majoration demandée puis justifier rigoureusement que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. (c) Appliquer le théorème du cours. Établir la convergence normale sur $[0, +\infty[$.

Ex 12. Utiliser un encadrement par des intégrales. Pour évaluer les intégrales obtenues à la fin, on pourra utiliser le changement de variable $u = x^t$.

Ex 13. (a) Méthodes du cours. (b) Expression de f' : somme d'une série géométrique. Limite : montrer que pour $a > 0$, il y a convergence normale sur $[a, +\infty[$. (c) Reconnaitre une dérivée.

Ex 14. (a) Théorème des séries alternées pour la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $[0, +\infty[$. Convergence normale pour $\sum f_n'$ sur $[a, +\infty[$, $a > 0$. (b) Théorème du cours, utiliser la convergence uniforme. (c) Simplifier $2f'(x) - f(x)$ puis résoudre l'équation différentielle obtenue (méthodes du cours de première année).