TD 19 : Séries entières

Rayon de convergence, domaine de définition

Exercice 1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes et étudier la convergence aux bornes de l'intervalle.

$$\textbf{(1)}\quad \sum x^{n^2} \qquad \textbf{(2)}\quad \sum (1+(-1)^n)x^{2n} \qquad \textbf{(3)}\quad \sum \frac{\mathrm{e}^n}{n!}x^{2n} \qquad \textbf{(4)}\quad \sum \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)x^n$$

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes et étudier la convergence aux bornes de l'intervalle.

$$\textbf{(1)}\quad \sum \frac{\ln(n)}{n^2}x^n \qquad \textbf{(2)}\quad \sum n(n-1)x^{2n} \qquad \textbf{(3)}\quad \sum \sqrt{1+\frac{1}{n}}x^{2n} \qquad \textbf{(4)}\quad \sum \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)x^{2n}$$

Exercice 3 *(Oral CCP, PC, 2018)*. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x$.

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$.

(b) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n u_n$ converge.

(c) Pour tout $N \in \mathbb{N}$, déterminer un réel v_N tel que $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} (-1)^n u_n = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1+x}\,\mathrm{d}x - v_N$.

(d) En déduire l'égalité $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

(e) Trouver deux constantes a et b telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = a + b(n+2)(n+1)u_n$.

(f) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

Rayon de convergence et calcul de la somme

Exercice 4 *(Oral CCP, PC, 2018, Exercice secondaire)*. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière :

$$\sum \frac{\sin^2(n\theta)}{n!}x^n$$

Réponse. La série exponentielle a pour rayon de convergence $+\infty$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|\frac{\sin^2(n\theta)}{n!}\right| \leqslant \frac{1}{n!}$$

On a donc :

$$R\left(\sum \frac{\sin^2(n\theta)}{n!}x^n\right) \geqslant R\left(\sum \frac{1}{n!}x^n\right) = +\infty$$

donc le rayon de convergence est $+\infty$. On note $f(x)$ la somme de la série. On a :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{ni\theta} - \mathrm{e}^{-ni\theta}}{2\mathrm{i}}\right)^2 \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2ni\theta} - 2 + \mathrm{e}^{-2ni\theta}}{-4}\frac{x^n}{n!} = -\frac{1}{4}\left(\exp(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}x) - 2\exp(x) + \exp(\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}x)\right)$$

(à simplifier).

Exercice 5. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(n+1)^2}{n}x^n$.

Exercice 6 *(Oral Centrale, PC, 2013)*. Soient $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{2}{n+1} a_{n-1}$.

(1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant a_n \leqslant n^2$.

(2) Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ et sa somme.

Exercice 7 *(Oral Centrale, PC, 2016)*. Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière :

$$\sum \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$$

Réponse. Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

On a alors $u_n \geqslant 1$ et $u_n \leqslant n$ car c'est une somme de n termes inférieurs à 1. On a donc :

$$\forall n \geqslant 1,\ 1 \leqslant u_n \leqslant n$$

On a donc :

$$1 = R\left(\sum x^n\right) \geqslant R\left(\sum u_n x^n\right) \geqslant R\left(\sum n x^n\right) = 1$$

Le rayon de convergence de $\sum u_n x^n$ est donc égal à 1. Considérons des séries entières :

$$\sum a_n x^n \quad \text{et} \quad \sum b_n x^n$$

On veut déterminer a_n et b_n de sorte que la série $\sum u_n x^n$ soit leur produit de Cauchy. Il faudra donc avoir :

$$\forall n \geqslant 1,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

On va donc poser $a_k = 1/k$ pour $k \geqslant 1$ et $b_k = 1$. On pose également $a_0 = 0$. On a donc les séries :

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} x^n$$
$$\sum_{n\geqslant 0} b_n x^n = \sum_{n\geqslant 0} x^n$$

Effectuons précisément leur produit de Cauchy. On pose pour $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Comme $a_0 = 0$, on a $v_0 = a_0 b_0 = 0$ et pour $n \geqslant 1$:

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = u_n$$

La série produit de Cauchy est alors la série entière $\sum_{n\geqslant 0} v_n x^n$ c'est à dire la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n x^n$. La série $\sum b_n x^n$ a pour rayon de convergence 1 (série géométrique) et la série $\sum a_n x^n$ a le même rayon de convergence c'est à dire 1. Considérons $x \in \,]-1,1[$, d'après le cours, en utilisant un DSE de référence :

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \\
\ln(1-x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-1)^n x^n}{n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n
\end{aligned}$$

On a donc finalement :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right) = \frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

Utilisation de la continuité

Exercice 8. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

(a) Justifier que la fonction f est définie au moins sur $[-1,1]$ et continue sur ce segment.

(b) En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Développements en série entière

Exercice 9. Déterminer les solutions DSE au voisinage de 0 de l'équation différentielle :

$$x^2 y'' + 6xy' + (6-x^2)y = -1$$

Exercice 10 *(Oral Mines Télécom, PC, 2021, adapté).* Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(1) Montrer l'existence du développement en série entière de $f : x \mapsto \frac{1}{(1-\alpha x)(1-\beta x)}$.

(2) Dans le cas où $0 < |\alpha| < |\beta|$, donner ce développement en série entière et déterminer son rayon de convergence.

Exercice 11 *(Oral ENSEA/ENSIIE, PC, 2016).* Soit $f : x \mapsto \int_0^{x^2} \frac{t}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que f est développable en série entière.

(b) Déterminer le rayon de convergence de la série entière.

Réponse.

(a) On considère la fonction $g : t \mapsto \frac{t}{1+t^3}$, elle est DSE sur $]-1,1[$ puisque :

$$\forall t \in]-1,1[,\ g(t) = t\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{3n+1}$$

On note G la primitive de g qui s'annule en 0, d'après le cours la fonction G est DSE sur $]-1,1[$ et :

$$\forall t \in]-1,1[,\ G(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2} t^{3n+2}$$

de sorte que pour $x \in]-1,1[$:

$$f(x) = G(x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2} x^{6n+4}$$

La fonction f est donc DSE sur $]-1,1[$.

(b) Considérons $x \in \mathbb{R}^*$, on pose pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{(-1)^n}{3n+2} x^{6n+4}$$

On a alors $u_n \neq 0$ et :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{x^{6n+10}}{3n+5} \cdot \frac{3n+2}{x^{6n+4}}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|^6$$

D'après la règle de d'Alembert, il y a deux cas :

— Si $|x| < 1$, alors $|x|^6 < 1$ et la série $\sum u_n$ converge absolument ;

— Si $|x| > 1$, alors $|x|^6 > 1$ et la série $\sum |u_n|$ diverge grossièrement donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

On en déduit que le rayon de convergence de la série entière du DSE de f vaut 1.

Exercice 12. On considère la fonction $f : \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

(a) Démontrer que f est développable en série entière en 0.

(b) Expliciter le développement ainsi que le rayon de convergence.

Réponse. D'après le cours, la fonction $x \mapsto (1+x)^{-1/2}$ est DSE sur $]-1,1[$, donc la fonction $x \mapsto (1-x^2)^{-1/2}$ est DSE sur $]-1,1[$. La fonction f est donc DSE sur $I =]-1,1[$ comme produit et primitives de fonctions DSE sur cet intervalle. On a pour $x \in I$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-x^2} f(x) &= \arcsin(x) \\
\sqrt{1-x^2} f'(x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
(1-x^2) f'(x) - x f(x) &= 1
\end{aligned}$$

On a de plus $f(0) = 0$. On note que f est impaire, on note son DSE sous la forme :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$$

On a alors pour $x \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned}
(1-x^2) f'(x) - x f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) a_n x^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) a_n x^{2n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+2} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) a_n x^{2n} - \sum_{n=1}^{+\infty} (2n-1) a_{n-1} x^{2n} - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^{2n} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left((2n+1) a_n - (2n-1) a_{n-1} - a_{n-1}\right) x^{2n} + a_0 \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left((2n+1) a_n - 2n a_{n-1}\right) x^{2n} + a_0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Par unicité du DSE on en déduit $a_0 = 1$ et :

$$a_n = \frac{2n}{2n+1} a_{n-1}$$

En déroulant cette relation de récurrence, on obtiendra :

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{(2n)(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3} a_0 \\
&= \frac{(2n)^2 (2n-2)^2 \cdots 2^2}{(2n+1)(2n)(2n-1)\cdots 3 \cdot 2} \\
&= \frac{2^{2n} n!^2}{(2n+1)!}
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{2n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{2n}n!^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Ce DSE étant nécessairement au moins valable sur $]-1,1[$. Soit $x\in\mathbb{R}^*$, pour $n\in\mathbb{N}$ on pose $u_n=a_nx^{2n+1}$. On a alors $u_n\neq 0$ et :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}x^2\right|\xrightarrow[n\to+\infty]{}x^2$$

D'après la règle de d'Alembert :

- Si $|x|<1$, alors $\sum u_n$ converge absolument ;
- Si $|x|>1$, alors $\sum u_n$ diverge groissèrement.

On en déduit que le rayon de convergence vaut 1.

Exercice 13. On suppose que R, a et M sont des réels strictements positifs et $f:]-R,R[\to\mathbb{R}$ est de classe C^∞ et telle que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in]-R,R[,\ \left|f^{(n)}(x)\right|\leqslant Ma^n$$

Démontrer que f est développable en série entière sur $]-R,R[$.

Réponse. Formule de Taylor reste intégral :

$$\forall x\in]-R,R[,\ f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\underbrace{\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt}_{=R_n(x)}$$

Et on a, changement de variable $u=t/x$:

$$R_n(x)=x^{n+1}\int_0^1\frac{(1-u)^n}{n!}f^{(n+1)}(ux)\,\mathrm{d}u$$
$$|R_n(x)|\leqslant M|ax|^{n+1}\int_0^1\frac{(1-u)^n}{n!}\,\mathrm{d}u=\frac{M|ax|^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

On en déduit que :

$$\forall x\in]-R,R[,\ \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\xrightarrow[n\to+\infty]{}f(x)$$

On a donc :

$$\forall x\in]-R,R[,\ f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

Par conséquent, f est développable en série entière sur $]-R,R[$.

Quelques exercices théoriques

Exercice 14. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$ dans les cas suivants :

(a) La suite (a_n) tend vers $\ell \neq 0$.

(b) La suite (a_n) est périodique et n'est pas identiquement nulle.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n est le nombre de diviseurs de n.

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n est le n-ième chiffre après la virgule dans le développement décimal du nombre π.

Réponse. Considérons, plus généralement, une suite (a_n) qui est bornée et ne tend pas vers 0. On note R le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$. Pour $x_0 = 1$, la suite $(a_n x_0^n)$ est bornée donc d'après le cours, $R \geqslant |x_0|$, autrement dit $R \geqslant 1$. De plus, la série $\sum a_n x_0^n$ est grossièrement divergente donc d'après le cours $R \leqslant |x_0|$ donc $R \leqslant 1$. On en déduit que $R = 1$.

(a) La suite (a_n) est convergente, elle est donc bornée et par hypothèse elle ne tend pas vers 0. D'après la remarque précédente, le rayon de convergence est 1.

(b) La suite (a_n) est périodique, notons p sa période on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+p} = a_n$$

Les seules valeurs prises par la suite (a_n) sont donc $a_0, \dots, a_{p-1}$. Pour le démontrer rigoureusement, on considère $n \in \mathbb{N}$ et on réalise la division euclidienne de n par p. Il existe alors des entiers q et r tels que $n = pq + r$ et $0 \leqslant r \leqslant p - 1$. On a alors :

$$a_n = a_{pq+r} = a_r \in \{a_0, \dots, a_{p-1}\}$$

La suite (a_n) ne prend donc qu'un nombre fini de valeurs, elle est par conséquent bornée. De plus, cette suite n'est pas identiquement nulle donc il existe $k \in [\![0, p-1]\!]$ tel que $a_k \neq 0$. Comme $a_{np+k} = a_k$, on a :

$$a_{np+k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a_k$$

La suite (a_n) ne converge donc pas vers 0. D'après la remarque précédente, le rayon de convergence vaut 1.

(c) Les diviseurs de n appartiennent à l'ensemble $[\![1, n]\!]$, donc $a_n \leqslant n$. De plus, 1 est toujours un diviseur de n donc $a_n \geqslant 1$. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leqslant a_n \leqslant n$$

Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est donc compris entre celui des séries entières $\sum x^n$ (qui vaut 1, série géométrique) et $\sum n x^n$ (qui vaut également 1 car c'est le même que celui de $\sum x^n$). Finalement, le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ vaut donc 1

(d) La suite (a_n) est par définition à valeurs dans $[\![0, 9]\!]$, elle est donc bornée. Le nombre π n'est pas un nombre décimal donc la suite (a_n) n'est pas constante égale à 0 *apcr* donc la suite (a_n) ne tend pas vers 0. D'après la remarque précédente, le rayon de convergence vaut 1.

Exercice 15. Démontrer que si $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors :

(a) La série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.

(b) La série entière $\sum a_n^2 z^n$ a pour rayon de convergence R^2.

Réponse.

(a) Notons R_1 le rayon de convergence de la série $\sum \frac{a_n z^n}{n!}$. Soit $r \in]0, R[$, on a :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \ \frac{a_n z^n}{n!} = a_n r^n \frac{(z/r)^n}{n!}$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série exponentielle $\sum \frac{(z/r)^n}{n!}$ converge, donc $\frac{(z/r)^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et ainsi :

$$\left|\frac{a_n z^n}{n!}\right| = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(|a_n r^n|\right)$$

La série $\sum a_n r^n$ converge absolument car $0 < r < R$, donc par comparaison de séries à termes positifs, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série

$$\sum \frac{a_n z^n}{n!}$$

converge absolument donc converge. On en déduit que $R_1 = +\infty$.

(b) Notons R_2 le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n^2 z^n$. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| < R$. Alors la suite $(a_n z_0^n)$ converge vers 0, donc la suite $(a_n^2 (z_0^2)^n)$ converge vers 0 et on en déduit que $|z_0^2| \leqslant R_2$ Ceci étant vrai quel que soit z_0 avec $|z_0| < R$, on en déduit que $R^2 \leqslant R_2$. Considérons maintenant $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| > R$. La suite $(a_n z_0^n)$ n'est pas bornée, il en est donc de même de la suite $(a_n^2 (z_0^2)^n)$ et on en déduit que $|z_0^2| \geqslant R_2$. Ceci étant vrai quel que soit z_0 avec $|z_0| > R$, on en déduit que $R^2 \geqslant R_2$. Ainsi, $R_2 = R^2$.

Exercice 16. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite à termes positifs telle que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ soit défini pour tout $x \in]-1, 1[$ et possède une limite finie ℓ lorsque $x \to 1$. Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge et calculer sa somme.

Réponse. On sait que $f(x) \xrightarrow[x\to 1]{} \ell$ avec ℓ une limite finie. Considérons $x \in]0, 1[$, comme $f(x)$ est la somme d'une série à termes positifs on a pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n x^n \leqslant f(x)$$

Par passage à la limite lorsque $x \to 1$:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \leqslant \ell$$

Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum a_n$ sont donc majorées par ℓ, par conséquent cette série est convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leqslant \ell$$

Par ailleurs, pour $N \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, 1[$:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n x^n \leqslant \sum_{n=0}^{N} a_n$$

Par passage à la limite quand N tend vers $+\infty$:

$$f(x) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

et en faisant tendre x vers 1 :

$$\ell \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ell$.

Exercice 17. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$.

(1) Déterminer le rayon de convergence R de f.
(2) Déterminer la limite de $f(x)$ quand $x \to R^-$.
(3) Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand $x \to R^-$.

Réponse. Soit $x \neq 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $x^{n^2} \neq 0$ et :

$$\left|\frac{x^{(n+1)^2}}{x^{n^2}}\right| = \left|x^{2n+1}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{si} \quad |x| < 1$$
$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \quad \text{si} \quad |x| > 1$$

D'après la régle de d'Alembert, si $|x| < 1$, alors la série $\sum x^{n^2}$ converge absolument et si $|x| > 1$, alors la série $\sum x^{n^2}$ diverge grossièrement. Par conséquent, $R = 1$. La fonction f est définie sur $]-1,1[$, de classe C^∞ et :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n^2-1}$$

En particulier, $f'(x) \geqslant 0$ pour $x \in [0,1[$ et la fonction f est croissante sur $[0,1[$. Elle admet donc une limite ℓ en 1^- (finie ou infinie). Quels que soient $N \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,1[$:

$$\sum_{n=0}^{N} x^{n^2} \leqslant f(x)$$

En faisant tendre x vers 1, on obtient $N+1 \leqslant \ell$. Ceci étant vrai quel que soit $N \in \mathbb{N}$ on en déduit que $\ell = +\infty$. Pour $x \in]0,1[$ fixé, on définit :

$$\varphi_x : t \mapsto x^{t^2} = \exp(t^2 \ln x)$$

Cette fonction est continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}^+$. On obtient de la manière habituelle (par encadrement par des intégrales) :

$$\int_0^{+\infty} \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t$$

Avec le changement de variable $u = (-\ln x)^{1/2} t$ de classe C^1 et bijectif :

$$\int_0^{+\infty} \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(-\ln x)^{1/2}} \int_0^{+\infty} \exp(-u^2)\,\mathrm{d}u$$

Comme $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}/2$:

$$f(x) \underset{x\to1^-}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}$$

Notons que $\ln(x) = \ln(1+x-1) \underset{x\to1}{\sim} x-1$, donc :

$$f(x) \underset{x\to1^-}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}$$

Indications

Ex 3. (a) Méthode du cours. (b) Série alternée. (c) Somme partielle série géométrique. (d) Justifier que (v_N) converge vers 0. (e) Deux intégrations par parties. (f) Question précédente, justifier que $u_n = O(1/n^2)$.

Ex 4. Rayon de convergence avec des comparaisons. Formule d'Euler pour effectuer le calcul.

Ex 5. Méthode usuelle pour le rayon de convergence. Somme : développer le carré et calculer la somme de chacune des 3 séries obtenues.

Ex 6. (1) Récurrence. (2) Rayon de convergence en utilisant les inégalités précédentes. Vérifier que la somme est solution de l'équation différentielle :

$$y'(x) - \frac{2x+1}{1-x}y(x) = 0$$

Ex 7. Rayon de convergence en trouvant un encadrement de

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Reconnaitre un produit de Cauchy pour la somme.

Ex 8. (a) Utiliser les théorèmes sur les séries de fonctions. (b) Reconnaitre un DSE usuel sur $]-1,1[$.

Ex 9. Considérer une fonction f somme d'une série entière. Reporter dans l'équation. Faire en sorte de pouvoir utiliser l'unicité du DSE pour déterminer les coefficients. Vérifier que le rayon de convergence obtenu est bien strictement positif.

Ex 10. Décomposition en éléments simples et séries géométriques.

Ex 11. Commencer par le DSE de $\dfrac{t}{1+t^3}$.

Ex 12. Justifier que f est DSE à l'aide d'opérations. Vérifier que f est solution de l'équation différentielle

$$(1-x^2)y'(x) - xy(x) = 1$$

Écrire le DSE de f sous la forme $\sum a_n x^{2n+1}$ (pourquoi est-ce possible ?) et utiliser l'équation différentielle pour obtenir les coefficients a_n.

Ex 13. Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral.

Ex 14. Dans chaque cas, utiliser que la suite (a_n) est bornée et ne tend pas vers 0 pour obtenir deux inégalités sur le rayon de convergence.

Ex 15. (a) Il faut montrer que cette série converge pour tout $z \in \mathbb{C}$. (b) Considérer $x > R^2$ et montrer que $\sum a_n^2 x^n$ diverge. Considérer ensuite x tel que $0 \leqslant x < R^2$ et montrer que $\sum a_n^2 x^n$ converge. Conclure.

Ex 16. Montrer que la suite (S_n) des sommes partielles de la série $\sum a_n$ est croissante et majorée.

Ex 17. (1) Méthodes usuelles. (2) Commencer par justifier que la limite existe. Considérer des sommes partielles pour justifier que la limite est $+\infty$. (3) Utiliser $\varphi_x : t \mapsto x^{t^2}$.