TD 9 : Premiers exercices sur la réduction (ven. 8 nov.)

Pour les 5/2 : les exercices marqués d'un points étaient présents dans la feuille de l'année dernière. S'il est nécessaire de distinguer si l'on travaille sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et si ce n'est pas précisé dans l'énoncé, il faudra distinguer les deux cas.

•Exercice 1. Dans chacun des exemples suivants, il faut déterminer le spectre de la matrice A ainsi que ses sous-espaces propres puis étudier si la matrice A est diagonalisable. On utilisera le polynôme caractéristique.

$$\textbf{(1)}\quad A=\begin{pmatrix}0&3&0\\1&-2&4\\1&1&1\end{pmatrix}\qquad \textbf{(2)}\quad A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&2&-4\\1&1&-3\end{pmatrix}\qquad \textbf{(3)}\quad A=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}7&5&-13\\-3&-1&9\\1&1&0\end{pmatrix}$$

$$\textbf{(4)}\quad A=\begin{pmatrix}-1&-3&4&2\\0&2&0&0\\1&1&-1&1\\1&1&2&-2\end{pmatrix}\qquad \textbf{(5)}\quad A=\begin{pmatrix}1&a&a\\-1&1&-1\\1&0&2\end{pmatrix}\text{ en fonction de } a\in\mathbb{R}$$

Exercice 2. Dans chacun des exemples suivants, il faut déterminer le spectre de la matrice $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ainsi que ses sous-espaces propres puis étudier si la matrice A est diagonalisable. On utilisera un polynôme annulateur de A.

$$\textbf{(1)}\quad A=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\0&\cdots&\cdots&0\\\vdots&&&\vdots\\0&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix}\qquad \textbf{(2)}\quad A=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\2&\vdots&&\vdots\\\vdots&\vdots&&\vdots\\n&0&\cdots&0\end{pmatrix}\qquad \textbf{(3)}\quad A=\begin{pmatrix}2&1&\cdots&1\\1&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

$$\textbf{(4)}\quad A=\begin{pmatrix}(0)&(0)\\-\mathrm{I}_n&(0)\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{K})\qquad \textbf{(5)}\quad A=\begin{pmatrix}\mathrm{I}_n&(0)\\2\mathrm{I}_n&\mathrm{I}_n\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{K})\qquad \textbf{(6)}\quad A=\begin{pmatrix}(0)&-\mathrm{I}_n\\\mathrm{I}_n&(0)\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$$

•Exercice 3. En utilisant l'équation aux éléments propres $Ax=\lambda x$, déterminer le spectre et les sous-espaces propres et étudier la diagonalisabilité de la matrice

$$A=\begin{pmatrix}1&\cdots&1\\\vdots&(0)&\vdots\\1&\cdots&1\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\quad\text{(avec un bloc de 0 de taille } n-2)$$

Exercice 4. Dans chacun des exemples suivants, il faut déterminer le spectre de l'endomorphisme f ainsi que ses sous-espaces propres puis étudier si f est diagonalisable. Pour étudier un endomorphisme $f\in\mathscr{L}(E)$, on peut aussi utiliser sa matrice dans une base de E.

$$\textbf{(1)}\quad f:\begin{array}{ccc}\mathscr{M}_2(\mathbb{R})&\to&\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\\M&\mapsto&M+\mathrm{tr}(M)\mathrm{I}_2\end{array}\qquad \textbf{(2)}\quad f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_3[X]&\to&\mathbb{R}_3[X]\\P&\mapsto&3XP-(X^2+1)P'\end{array}$$

$$\textbf{(3)}\quad f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_3[X]&\to&\mathbb{R}_3[X]\\P&\mapsto&P(X-1)\end{array}\qquad \textbf{(4)}\quad f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_n[X]&\to&\mathbb{R}_n[X]\\P&\mapsto&XP'+2P\end{array}$$

•Exercice 5. Dans chacun des exemples suivants, il faut déterminer le spectre de l'endomorphisme f ainsi que ses sous-espaces propres puis étudier si f est diagonalisable. On pourra calculer f^2, f^3, etc. et voir s'il est possible d'utiliser un polynôme annulateur de f.

$$\textbf{(1)}\quad f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3&\to&\mathbb{R}^3\\\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}&\mapsto&\begin{pmatrix}x+y+z\\x+y+z\\x+y+z\end{pmatrix}\end{array}\qquad \textbf{(2)}\quad f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3&\to&\mathbb{R}^3\\\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}&\mapsto&\begin{pmatrix}y\\x\\-z\end{pmatrix}\end{array}\qquad \textbf{(3)}\quad f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3&\to&\mathbb{R}^3\\\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}&\mapsto&\begin{pmatrix}y\\z\\0\end{pmatrix}\end{array}$$

Exercice 6. Démontrer que $\mathrm{Sp}(\varphi)=\varnothing$ et $\mathrm{Sp}(\Delta)=\{0\}$ et déterminer $E_0(\Delta)$.

$$\textbf{(1)}\quad \varphi:\begin{array}{ccc}\mathrm{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})&\to&\mathrm{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})\\f&\mapsto&\left[\varphi(f):x\in\mathbb{R}\mapsto\displaystyle\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t\right]\end{array}\qquad \textbf{(2)}\quad \Delta:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}[X]&\to&\mathbb{R}[X]\\P&\mapsto&P(X+1)-P(X)\end{array}$$