TD 15 : Probabilités

Définition d'une probabilité, espace probabilisé

Exercice 1. On considère des réels a et b strictement positifs.

(a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante, portant sur a et b, pour qu'il existe une probabilité $\mathbf{P}$ sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(\{n\}) = a^n b$.

(b) On suppose cette condition satisfaite. On effectue le tirage d'un nombre entier suivant cette loi et on considère l'évènement A : « le nombre obtenu est pair. » Comparer $\mathbf{P}(A)$ et $\mathbf{P}(\overline{A})$.

Exercice 2. Soit $n \geqslant 2$. Parmi les familles de n enfants, on considère les évènements A : « la famille comporte à la fois des garçons et des filles » et B : « la famille est composée de garçons et d'au plus une fille. » Construire un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$ associé au problème et déterminer les probabilités des évènements A et B. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 3 *(Oral Polytechnique/ENS, PSI, 2019, modifié)*. On appelle pavage de taille n un découpage d'un rectangle de taille $2 \times n$ avec des rectangles 1×2 et 2×1. On note u_n le nombre de pavages de taille n. Par exemple $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$, $u_4 = 5$.

(a) Trouver une relation de récurrence entre les u_n.
En déduire qu'il existe des réels a, b, c, c' que l'on déterminera tels que $a > b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = ca^n + c'b^n$.

(b) On choisit aléatoirement l'un des pavages parmi les pavages de taille n. On note $p_{1,n}$ la probabilité que ce pavage débute avec un rectangle vertical.
Calculer $p_{1,n}$ et étudier sa limite lorsque $n \to +\infty$.

(c) On considère toujours un pavage choisi aléatoirement et pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note $U_{i,n}$ la variable aléatoire qui vaut 1 s'il y a un rectangle vertical dans la case i et 0 sinon.
Déterminer $\mathbf{E}(U_{i,n})$ ainsi que sa limite quand $n \to +\infty$.

(d) Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. On note $V_{i,j,n}$ la variable aléatoire qui vaut 1 s'il y a des rectangles verticaux en position i et j et vaut 0 sinon. Calculer $E(V_{i,j,n})$.

Calculs de probabilités d'évènements

Exercice 4. Soient A, B, C trois évènements. Les questions qui suivent sont indépendantes.

(a) On suppose que $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = 1$. Calculer $\mathbf{P}(A \cap B)$.

(b) Montrer que $\mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(\overline{B}) \leqslant \mathbf{P}(A \cap B) \leqslant \min(\mathbf{P}(A), \mathbf{P}(B))$.

(c) On suppose que la réalisation de A et B entraine celle de C. Montrer que $\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) \leqslant 1 + \mathbf{P}(C)$.

Exercice 5. Soient A, B, C trois évènements. Les questions qui suivent sont indépendantes.

(a) Comparer $\mathbf{P}(A|B \cap C)\mathbf{P}(B|C)$ et $\mathbf{P}(A \cap B|C)$.

(b) Comparer $\mathbf{P}(A \cap B|A \cup B)$ et $\mathbf{P}(A \cap B|A)$.

Exercice 6. Démontrer que si $A_1, \ldots, A_n$ sont des évènements indépendants, alors $\overline{A_1}, A_2, \ldots, A_n$ sont indépendants.

Réponse. On suppose $A_1, \ldots, A_n$ indépendants.
Première étape. On va commencer par démontrer que $\mathbf{P}(\overline{A_1} \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbf{P}(\overline{A_1})\mathbf{P}(A_2)\cdots\mathbf{P}(A_n)$.
On pose $A = A_2 \cap \cdots \cap A_n$. On note que :

$$\overline{A_1} \cap A = A \setminus A_1 = A \setminus (A \cap A_1)$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\overline{A_1} \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) &= \mathbf{P}(\overline{A_1} \cap A) = \mathbf{P}(A \setminus (A \cap A_1)) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap A_1) = \mathbf{P}(A_2)\cdots\mathbf{P}(A_n) - \mathbf{P}(A_1)\cdots\mathbf{P}(A_n) \\ &= \mathbf{P}(\overline{A_1})\mathbf{P}(A_2)\cdots\mathbf{P}(A_n)\end{aligned}$$

Deuxième étape. On pose $B_1 = \overline{A_1}, B_2 = A_2, \dots, B_n = A_n$. On va maintenant démontrer que $B_1, \dots, B_n$ sont indépendants. On considère $I \subset [\![1, n]\!]$. Il faut démontrer que :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \prod_{i\in I} \mathbf{P}(B_i)$$

On distingue deux cas.

- Si $1 \notin I$, alors $I \subset [\![2, n]\!]$. Dans ce cas, comme $A_2, \dots, A_n$ sont indépendants, on a bien :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} \mathbf{P}(A_i) = \prod_{i\in I} \mathbf{P}(B_i)$$

- Si $1 \in I$, alors on note $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ avec $1 = i_1 < i_2 < \dots < i_k$. On a alors :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \mathbf{P}(\overline{A_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

  et ainsi avec la première étape :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) &= \mathbf{P}(\overline{A_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbf{P}(\overline{A_1})\mathbf{P}(A_{i_2}) \cdots \mathbf{P}(A_{i_k}) \\ &= \prod_{i\in I} \mathbf{P}(B_i)\end{aligned}$$

Ceci montre que $B_1, \dots, B_n$ sont indépendants.

Suites d'évènements, limites monotones

Exercice 7 *(Oral Mines Télécom, PC, 2018)*. Soient 2 urnes : la première contient 2 boules blanches et 3 boules noires et la seconde 4 blanches et 3 noires. On choisit une urne au hasard et on réalise un tirage avec remise : si la boule tirée est blanche, on fait le tirage suivant dans l'urne 1 sinon dans l'urne 2. Soient l'évènement B_n : « tirer une boule blanche au n-ième tirage » et $P_n = \mathbf{P}(B_n)$.
(a) Calculer P_1. (b) Calculer P_{n+1} en fonction de P_n. (c) Calculer P_n en fonction de n.
Réponse. On considère les évènements U_{1n} : « le n-ième tirage a lieu dans l'urne 1 » et U_{2n} : « le n-ième tirage a lieu dans l'urne 2. » Alors (U_{1n}, U_{2n}) est un système complet d'évènements. On utilise tout d'abord la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements (U_{11}, U_{21}) :

$$P_1 = \mathbf{P}(B_1) = \mathbf{P}(B_1|U_{11})\mathbf{P}(U_{11}) + \mathbf{P}(B_1|U_{21})\mathbf{P}(U_{21}) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} + \frac{4}{7}\right) = \frac{1}{5} + \frac{2}{7}$$

De même, on utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $(U_{1,n+1}, U_{2,n+1})$:

$$P_{n+1} = \mathbf{P}(B_{n+1}) = \mathbf{P}(B_{n+1}|U_{1n+1})\mathbf{P}(U_{1n+1}) + \mathbf{P}(B_{n+1}|U_{2n+1})\mathbf{P}(U_{2n+1}) = \frac{2}{5}\mathbf{P}(U_{1n+1}) + \frac{4}{7}\mathbf{P}(U_{2n+1})$$

Les évènements U_{1n+1} et B_n sont identiques, donc :

$$P_{n+1} = \frac{2}{5}\mathbf{P}(B_n) + \frac{4}{7}\mathbf{P}(\overline{B_n}) = \frac{2}{5}P_n + \frac{4}{7}(1 - P_n) = \frac{4}{7} - \frac{6}{35}P_n$$

On obtient une suite arithmético-géométrique. Le point fixe est $\ell = 20/41$ et on a :

$$P_{n+1} - \ell = -\frac{6}{35}\left(P_{n+1} - \ell\right)$$

La suite $(P_n - \ell)$ est géométrique de raison $-6/35$. On dispose du terme P_1 d'indice 1, on a donc : On en déduit :

$$\forall n \geqslant 1,\ P_n - \ell = \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1} (P_1 - \ell)$$

et ainsi :

$$\forall n \geqslant 1,\ P_n = \ell + \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1} (P_1 - \ell)$$

Exercice 8 *(Oral Mines-Ponts, PC, 2018)*. On lance une pièce dont la probabilité de tomber sur *pile* est p. On note A_n : « au n-ième lancé on fait pour la première fois deux *pile* consécutifs. » On note a_n la probabilité de cet évènement.

(a) Calculer a_1, a_2, a_3.

(b) Trouver une relation reliant a_{n+2} à a_{n+1} et a_n.

(c) Pourquoi est-il quasi-certain d'obtenir deux *pile* consécutifs ?

Exercice 9. Une pièce de monnaie est telle que, quand on la lance, le côté *pile* apparaît avec la probabilité $2/3$ et le côté *face* avec la probabilité $1/3$. L'expérience consiste à effectuer des lancers successifs jusqu'à ce que les deux côtés de la pièce soient apparus.

(a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note B_n l'événement : « le même côté est apparu au cours des n premiers lancers. » Démontrer que $(B_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite monotone d'événements.

(b) Retrouver la probabilité que l'expérience ne s'arrête jamais.

Exercice 10. Une puce se déplace sur 3 cases A, B, C. Si la puce se trouve en A ou B au temps n, elle a équiprobabilité de se retrouver sur chacune des trois case au temps $n+1$. Si la puce se trouve en C au temps n, elle y reste. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

- A_n (resp. B_n, C_n) : « La puce se trouve en A (resp. B, C) au temps n » ;
- $a_n = \mathbf{P}(A_n)$, $b_n = \mathbf{P}(B_n)$, $c_n = \mathbf{P}(C_n)$.

(a) Exprimer c_{n+1} en fonction de c_n. En déduire l'expression de c_n en fonction de c_0 et de n.

(b) Calculer $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n \geqslant 1} C_n\right)$.

Exercice 11. On considère une suite infinie d'urnes $(U_n)_{n \geqslant 2}$ contenant chacune des boules de couleur noire et blanche. L'expérience consiste à extraire de chaque urne une boule, en commençant par l'urne numéro 2, puis la 3, etc. jusqu'à obtenir une boule noire. On considère les événements suivants $(n \geqslant 2)$:

- A : « on ne tire jamais de boule noire », *i.e.* « l'expérience ne s'arrête pas » ;
- A_n : « les tirages dans les urnes numérotées de 2 à n n'amènent que des boules blanches. »

(a) Quelle est la particularité de la suite d'événements $(A_n)_{n \geqslant 2}$?

(b) Exprimer l'événement A en fonction des événements A_n.

(c) On suppose que, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'urne numéro n contient n boules dont une seule est noire. Calculer, pour tout entier $n \geqslant 2$, la probabilité $\mathbf{P}(A_n)$ puis la probabilité $\mathbf{P}(A)$.

(d) On suppose que, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'urne numéro n contient n^2 boules dont une seule est noire. Démontrer par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'égalité :

$$\mathbf{P}(A_n) = \frac{n+1}{2n}$$

puis en déduire la probabilité $\mathbf{P}(A)$.

Exercice 12.

(a) Soient A et B deux évènements tels que $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = 1$. Démontrer que $\mathbf{P}(A \cap B) = 1$.

(b) Soit $(A_n)_{n \geqslant 0}$ une suite d'évènements telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(A_n) = 1$. Démontrer que :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1$$

Réponse.

(a) On a :

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cup B)$$

Or $\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(A \cup B) \leqslant 1$ donc $\mathbf{P}(A \cup B) = 1$ et ainsi :

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cup B) = 1$$

(b) La réunion contient A_0 et $\mathbf{P}(A_0) = 1$ donc :

$$1 = \mathbf{P}(A_0) \leqslant \mathbf{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leqslant 1$$

et on a ainsi $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1$. On pose ensuite :

$$C_n = \bigcap_{k=0}^{n} A_k$$

La suite C_n est décroissante. En utilisant la première question, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(C_n) = 1$. Avec le théorème des limites monotones :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}(C_n) = 1$$

Indications

Ex 1. (a) Méthode du cours. (b) Déterminer $\mathbf{P}(A)$ en calculant la somme d'une série.

Ex 2. Choisir un ensemble fini Ω qui modélise le problème. Choisir une probabilité pertinente sur Ω. Calculer alors $\mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(B)$ et $\mathbf{P}(A \cap B)$.

Ex 3. (a) Exprimer u_n en fonction de u_{n-1} et u_{n-2} en utilisant le fait qu'un pavage de taille n commence nécessairement par un rectangle vertical ou deux rectangles horizontaux. (b) Déterminer le nombre de pavages de taille n qui commencent par un rectangle vertical. (c) Déterminer le nombre de pavages de taille n qui possèdent un rectangle vertical en position i. (d) Procéder de même.

Ex 4. (a) Calculer d'abord $\mathbf{P}(A \cup B)$. (b) Écrire $\mathbf{P}(A)$ en utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $(B, \overline{B})$. (c) Utiliser $\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A \cup B) + \mathbf{P}(A \cap B)$.

Ex 5. Utiliser la définition des probabilités conditionnelles.

Ex 6. Démontrer que $\mathbf{P}(\overline{A_1} \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbf{P}(\overline{A_1})\mathbf{P}(A_2) \cdots \mathbf{P}(A_n)$ puis justifier que ceci permet de conclure.

Ex 7. (a) et (b) Formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements (U_{1n}, U_{2n}) (le n-ième tirage a lieu dans l'urne 1, le n-ième tirage a lieu dans l'urne 2). (c) Reconnaitre un type de suite usuel.

Ex 8. (a) Utiliser les évènements usuels F_n et P_n. (b) Utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements (F_1, P_1) et comprendre comment exprimer $\mathbf{P}(A_{n+2}|F_1)$ et $\mathbf{P}(A_{n+2}|P_1)$ en utilisant a_n et a_{n+1}. (c) Calculer la probabilité de $\bigcup_{n=2}^{+\infty} A_n$.

Ex 9. (a) Démontrer que la suite (B_n) est décroissante. (b) Utiliser un théorème du cours.

Ex 10. (a) Formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements (A_n, B_n, C_n). (b) Utiliser les limites monotones.

Ex 11. (a) Reconnaitre une propriété de monotonie. (b) Utiliser une intersection ou une réunion infinie. (c) Calculer $\mathbf{P}(A_n)$ puis utiliser un théorème du cours. (d) Faire de même.

Ex 12. (a) Utiliser $\mathbf{P}(A \cup B)$. (b) Attention : rien ne dit que $A_n = \Omega$! L'une des égalités est évidente, pour l'autre utiliser les propriétés sur les limites monotones.