TD 8 : Polynômes en algèbre linéaire

Pour les 5/2 : les exercices marqués d'un points étaient présents dans la feuille de l'année dernière.

Applications des polynômes annulateurs

Exercice 1. On considère la matrice par blocs $A = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_n & -\mathrm{I}_n \\ \hline 0 & 2\mathrm{I}_n \end{array}\right)$.

(a) Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 de A.

(b) Démontrer que A est inversible et exprimer A^{-1} comme une combinaison linéaire de A et I_{2n}.

Réponse. On trouve :

$$A^2 = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_n & -3\mathrm{I}_n \\ \hline 0 & 4\mathrm{I}_n \end{array}\right) = 3A - 2\mathrm{I}_{2n}$$

donc $X^2 - 3X + 2$ est annulateur de A puis :

$$A(A - 3\mathrm{I}_n) = -2\mathrm{I}_{2n}$$

donc A est inversible et :

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(3\mathrm{I}_{2n} - A)$$

Exercice 2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $P = (X-2)^2(X+1)$ est un polynôme annulateur de A.

(a) Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{K}$ et $Q_k \in \mathbb{K}[X]$ tels que :

$$X^k = P(X)Q(X) + a_k X^2 + b_k X + c_k$$

(b) En utilisant cette relation, ainsi que sa dérivée, et en substituant des valeurs particulières à X, déterminer l'expression de a_k, b_k, c_k en fonction de k.

(c) En déduire une expression de A^k comme combinaison linéaire de A^2, A et I_n.

Réponse.

(a) Division euclidienne de X^k par P, il existe $Q, R \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

$$X^k = PQ + R$$

et $\deg R < \deg P = 3$ donc il existe $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{R}$ tels que $R = a_k X^2 + b_k X + c_k$.

(b) On applique la relation $X^k = PQ + R$ en substituant 2 puis -1 à X :

$$2^k = 4a_k + 2b_k + c_k \qquad (1)$$
$$(-1)^k = a_k - b_k + c_k \qquad (2)$$

On dérive la relation $X^k = PQ + R$, on obtient :

$$kX^{k-1} = P'Q + PQ' + 2a_k X + b_k$$

Comme 2 est racine double de P, 2 est racine de P' donc en substituant 2 à X on obtient :

$$k2^{k-1} = 4a_k + b_k \qquad (3)$$

Avec les équations $(1),(2),(3)$, après calcul :

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{6}k2^k + \frac{1}{9}(-1)^k - \frac{1}{9}2^k \\
b_k &= -\frac{1}{6}k2^k + \frac{4}{9}(-1)^{k+1} + \frac{4}{9}2^k \\
c_k &= -\frac{1}{3}k2^k + \frac{4}{9}(-1)^k + \frac{5}{9}2^k
\end{aligned}$$

(c) On a alors :

$$A^k = a_k A^2 + b_k A + c_k \mathrm{I}_n$$

Exercice 3. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $X^3 + X + 2$ est annulateur de A et qu'il n'existe pas de polynôme annulateur de degré 2 de A.

(a) Démontrer que $(A + \mathrm{I}_n)(A^2 - X + 2\mathrm{I}_n) = 0$.

(b) Démontrer que $A + \mathrm{I}_n$ n'est pas inversible.

Réponse.

(a) On pose $P = X^3 + X + 2$. On note que $P(-1) = 0$ donc -1 est racine de P donc on peut mettre $X + 1$ en facteur dans P. Après calcul :

$$P = (X+1)(X^2 - X + 2)$$

En appliquant avec A :

$$(A + \mathrm{I}_n)(A^2 - A + 2\mathrm{I}_n) = 0$$

(b) Supposons $A + \mathrm{I}_n$ inversible, on multiplie à gauche par $(A + \mathrm{I}_n)^{-1}$:

$$A^2 - A + 2\mathrm{I}_n = 0$$

Le polynôme $X^2 - X + 2$ est annulateur de A et de degré 2 : contradiction. Par conséquent, $A + \mathrm{I}_n$ n'est pas inversible.

Exercice 4. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $X^2 - 3X - 10$ est annulateur de f.

(a) On pose $g = \dfrac{2f - 3\,\mathrm{id}}{7}$. Démontrer que g est une symétrie de E.

(b) Démontrer que $\mathrm{Ker}(f - 5\,\mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(f + 2\,\mathrm{id}) = E$.

Réponse.

(a) On a $g \in \mathscr{L}(E)$ et :

$$g^2 - \mathrm{id} = \frac{(2f - 3\,\mathrm{id})^2}{49} - \mathrm{id} = \frac{4f^2 - 12f + 9\,\mathrm{id} - 49\,\mathrm{id}}{49} = 0$$

donc g est une symétrie de E.

(b) Comme g est une symétrie de E :

$$\mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(g + \mathrm{id}) = E$$

Or :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}) = \{x \in E \mid g(x) = x\} = \{x \in E \mid 2f(x) - 3x = 7x\} = \{x \in E \mid f(x) = 5x\} = \mathrm{Ker}(f - 5\,\mathrm{id}) \\
&\mathrm{Ker}(g + \mathrm{id}) = \{x \in E \mid g(x) = -x\} = \{x \in E \mid 2f(x) - 3x = -7x\} = \{x \in E \mid f(x) = -2x\} = \mathrm{Ker}(f + 2\,\mathrm{id})
\end{aligned}$$

Quelques problèmes sur des thèmes classiques

•Problème 5 *(Sur les projecteurs)*. Soient E un espace vectoriel, $a, b \in \mathbb{K}$ avec $a \neq b$ et $p, q, f \in \mathscr{L}(E)$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{r} p+q=\mathrm{id} \\ ap+bq=f \\ a^2p+b^2q=f^2 \end{array}\right.$$

(1) Montrer que p et q sont des projecteurs associés.
(2) Montrer que $(f-a\mathrm{id})(f-b\mathrm{id})=0$.
(3) Montrer que $f^n=a^np+b^nq$ quel que soit $n\in\mathbb{N}$.

Réponse.

(1) On développe $(f-a\mathrm{id})(f-b\mathrm{id})$ et on exprime le résultat en fonction de p et q :

$$\begin{aligned}(f-a\mathrm{id})(f-b\mathrm{id}) &= f^2-(a+b)f+ab\mathrm{id} \\ &= (a^2p+b^2q)-(a+b)(ap+bq)+ab(p+q) \\ &= 0\end{aligned}$$

Ensuite on note que :

$$f-b\mathrm{id}=(ap+bq)-b(p+q)=(a-b)p$$

donc :

$$p=\frac{f-b\mathrm{id}}{a-b}$$

puis :

$$\begin{aligned}p^2-p &= \frac{(f-b\mathrm{id})^2}{(a-b)^2}-\frac{f-b\mathrm{id}}{a-b} \\ &= \frac{(f-b\mathrm{id})^2-(a-b)(f-b\mathrm{id})}{(a-b)^2} \\ &= \frac{f^2-2bf+b^2\mathrm{id}-(a-b)f+(a-b)b\mathrm{id}}{(a-b)^2} \\ &= \frac{f^2-(a+b)f+ad\mathrm{id}}{(a-b)^2} \\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi, $p^2=p$ donc p est un projecteur et $q=\mathrm{id}-p$ est le projecteur associé.

(2) On a déjà obtenu à la question précédente que $(f-a\mathrm{id})\circ(f-b\mathrm{id})=0$.

(3) Pour le dernier point, on procède par récurrence. Le résultat est vrai pour $n\in\{0,1,2\}$. Supposons-le vrai au rang n ($n\geqslant 1$ fixé), alors :

$$f^{n+1}=(ap+bq)(a^np+b^nq)=a^{n+1}p^2+ab^npq+ba^nqp+b^{n+1}q^2=a^{n+1}p+b^{n+1}q$$

•Problème 6 *(Sur le commutant)*. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, f un endomorphisme de E et $x_0\in E$ tel que $\mathscr{B}=(x_0, f(x_0),\dots,f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E. On note :

$$\mathscr{C}=\left\{g\in\mathscr{L}(E)\mid fg=gf\right\}; \qquad \begin{array}{rccc}\varphi: & \mathscr{C} & \to & E \\ & g & \mapsto & g(x_0)\end{array}$$

(1) Montrer que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.
(2) Montrer que φ est un isomorphisme.
(3) En déduire $\dim\mathscr{C}$.
(4) Démontrer que $\mathscr{C}=\left\{P(f)\mid P\in\mathbb{K}[X]\right\}$.

•Problème 7 *(Sur le commutant et l'interpolation).* Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts et soit f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $D = \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. On note :

$$\mathscr{C} = \{g \in \mathscr{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$$

(1) Soit $g \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que si $g \in \mathscr{C}$, alors la matrice de g dans la base canonique est diagonale. La réciproque est-elle vraie ?

(2) Montrer que pour toute matrice diagonale $\Delta = \mathrm{diag}(\beta_1, \dots, \beta_n)$, il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\Delta = P(D)$.

(3) Montrer que : $\{g \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n) \mid fg = gf\} = \{P(f) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$.

•Problème 8 *(Sur les matrices de rang 1).*

(1) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{rg}(M) = 1$. Démontrer qu'il existe $X, Y \in \mathbb{K}^n$ tels que $M = XY^\top$.

(2) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{rg}(M) \leqslant 1$. On note t la somme des coefficients diagonaux de M. Démontrer que le polynôme $X^2 - tX$ est annulateur de M.

(3) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1. Montrer que M est semblable à une matrice $\mathrm{diag}(\lambda, 0, \dots, 0)$ avec un $\lambda \in \mathbb{K}$ ou à E_{12} (matrice de la base canonique).

•Problème 9 *(Sur les endomorphismes nilpotents).*

(1) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ avec E de dimension n. On suppose que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. On considère x_0 tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$. Démontrer que la famille :

$$\mathscr{B} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$$

est une base de E.

(2) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$. Déterminer le rang de f.

(3) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = 0$. Déterminer le rang de f.

•Problème 10 *(Sur l'interpolation et le déterminant de Vandermonde).* On considère $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ des scalaires deux à deux distincts. Pour $i \in [\![0, n]\!]$, on définit le polynôme :

$$L_i = \prod_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \neq i}} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}$$

On rappelle que la famille $\mathscr{B} = (L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. On note $\mathscr{C} = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

(1) Rappeller quelle est l'expression d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans la base $\mathscr{B}$.

(2) En déduire l'expression de X^k dans la base $\mathscr{B}$ pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$.

(3) On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{C}$. Déterminer $\det(P)$.

Indications

Ex 1. (a) Calculer A^2 et montrer que A^2 est combinaison linéaire de A et I_{2n}. (b) Méthode usuelle avec un polynôme annulateur.

Ex 2. (a) Utiliser le théorème de division euclidienne. (b) Substituer à X les valeurs 2 et -1, on obtient deux équations. Reprendre l'expression de X^k obtenue à la question précédente, dériver et substituer à X la valeur 2, on obtient une troisième équation pour déterminer a_k, b_k, c_k.

Ex 3. (a) On peut mettre en facteur $X+1$ dans X^3+X+2. (b) Supposer $A+\mathrm{I}_n$ inversible et en déduire un polynôme annulateur de A de degré 2. Conclure.

Ex 4. (a) Caractérisation usuelle des symétries en calculant g^2. (b) L'application g est une symétrie donc on dispose de deux sous-espaces supplémentaires de E.

Pb 5. (1) Exprimer $f - a\mathrm{id}$ et $f - b\mathrm{id}$ en fonction de p et q, utiliser ceci pour calculer p^2. (2) Effectuer le calcul. (3) Récurrence.

Pb 6. (1) Méthode usuelle. (2) Montrer que φ est linéaire, injective (considérer $g \in \operatorname{Ker}\varphi$, montrer que $g(f^k(x_0)) = 0$ pour tout k et conclure) et surjective (considérer $y \in E$, utiliser la base $\mathscr{B}$ pour montrer qu'il existe un $g \in \mathscr{C}$ tel que $y = g(x_0)$). (3) Propriété usuelle d'un isomorphisme en dimension finie. (4) Démontrer que la famille $(\mathrm{id}, f, \ldots, f^{n-1})$ est une famille libre d'éléments de $\mathscr{C}$.

Pb 7. (1) Considérer A la matrice de g dans cette même base ; calculer AD et DA. (2) Utiliser les polynômes interpolateurs associés aux abscisses $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. (3) Utiliser les questions précédentes.

Pb 8. (1) Il existe un vecteur $X \in \mathbb{K}^n$ non nul tel que chaque colonne de M est proportionnelle à X. Noter $y_1, \ldots, y_n$ les coefficients de proportionalité et effectuer le calcul. (2) Utiliser l'expression précédente et effectuer le calcul. (3) Considérer f canoniquement associée à M, on a d'après la question précédente $f^2 = tf$. Suivant que $t = 0$ ou non, montrer qu'il existe une base de $\mathbb{K}^n$ dans laquelle la matrice de f est E_{12} ou $\operatorname{diag}(\lambda, 0, \ldots, 0)$.

Pb 9. (1) Prendre une combinaison linéaire nulle, composer avec des puissances de f. (2) Utiliser la question précédente. (3) Démontrer que $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(f)$. Utiliser le théorème du rang.

Pb 10. (1) Expression donnée dans le cours. (2) Application de la question précédente. (3) Expliciter la matrice P et reconnaitre un déterminant usuel.