TD 7 : Intégration

Études de convergences

Exercice 1. Étudier la nature des intégrales

$$\textbf{(1)}\quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}\,\mathrm{d}t \qquad \textbf{(2)}\quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}(t)}\,\mathrm{d}t \qquad \textbf{(3)}\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+e^t)(1+\mathrm{e}^{-t})}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 2. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, étudier la nature des intégrales

$$\textbf{(1)}\quad \int_0^{+\infty} \sqrt{t}\cos(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad \textbf{(2)}\quad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \qquad \textbf{(3)}\quad \int_0^{+\infty} t^\alpha \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 3. Étudier la nature des intégrales

$$\textbf{(1)}\quad \int_0^{1} \frac{1+x}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x \qquad \textbf{(2)}\quad \int_0^{1} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x \qquad \textbf{(3)}\quad \int_0^{1} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 4. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, étudier la nature des intégrales

$$\textbf{(1)}\quad \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \qquad \textbf{(2)}\quad \int_{-1}^{1} \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \qquad \textbf{(3)}\quad \int_0^{1} \frac{t^\alpha}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 5. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}^{+*}$, étudier la nature des intégrales

$$\textbf{(1)}\quad \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^\beta}\,\mathrm{d}t \qquad \textbf{(2)}\quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^\alpha)}{t^\beta}\,\mathrm{d}t \qquad \textbf{(3)}\quad \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$$

Réponse. Les fonctions

$$\frac{t^\alpha}{1+t^\beta}, \quad \frac{\ln(1+t^\alpha)}{t^\beta} \quad \text{et} \quad \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)$$

sont continues et positives sur $]0,+\infty[$.

(1) Comme $\beta > 0$:

$$\frac{t^\alpha}{1+t^\beta} \underset{t\to 0}{\sim} t^\alpha = \frac{1}{t^{-\alpha}}$$

et $\int_0^1 t^\alpha\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $-\alpha < 1$ *i.e.* $\alpha > -1$. Toujours sachant que $\beta > 0$:

$$\frac{t^\alpha}{1+t^\beta} \underset{t\to +\infty}{\sim} t^{\alpha-\beta} = \frac{1}{t^{\beta-\alpha}}$$

et $\int_0^{+\infty} t^{\alpha-\beta}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\beta-\alpha > 1$.

Par comparaison (fonctions positives), $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha\,\mathrm{d}t}{1+t^\beta}$ converge ssi $-1 < \alpha < \beta - 1$.

(2) Non détaillé ici, venir me poser des questions.

(3) On a :

$$\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2} \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) = \ln\left(\frac{1+t^2}{t^2}\right) = \ln(1+t^2) - 2\ln(t) = -2\ln(t) + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(\ln t)$$

$$\underset{t\to 0}{\sim} -2\ln t \quad \text{et} \quad \int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$

Par comparaison (fonctions positives), $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 6. Étudier successivement la convergence des intégrales :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t, \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad K = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}+\cos t}\,\mathrm{d}t$$

Réponse. Les fonctions

$$f : t \mapsto \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$$
$$g : t \mapsto \frac{\sin(2t)}{t}$$
$$h : t \mapsto \frac{\sin t}{\sqrt{t}+\cos t}$$

sont continues sur $]0,+\infty[$. Notons que pour h, il faut rapidement justifier que le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$. Considérons $t>0$, on a alors soit $t>1$ et dans ce cas, comme $-1 \leqslant \cos t \leqslant 1$, on a $\sqrt{t}+\cos t > 0$; soit $t \in]0,1]$, on sait alors que $\cos(t) > 0$ donc à nouveau $\sqrt{t}+\cos t > 0$.
On a :

$$f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

donc f est prolongeable par continuité en 0 donc l'intégrale I est faussement impropre en 0. On considère les fonctions :

$$u'(t) = \sin(t) \qquad v(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$$
$$u(t) = -\cos(t) \qquad v'(t) = \frac{-1}{2t^{3/2}}$$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[1,+\infty[$ et :

$$u(t)v(t) = \frac{\cos(t)}{2t^{3/2}} \xrightarrow[t\to +\infty]{} 0$$

Par intégration par parties, les intégrales

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$$

sont de même nature. Or :

$$\frac{\cos t}{t^{3/2}} = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{-3/2}\,\mathrm{d}t$ converge donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$ puis $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$ puis I convergent.
Pour g, pour simplifier, par le changement de variable affine $u = 2t$, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u$$

sont de même nature. On a démontré en classe la convergence de cette intégrale (on ne le rédige pas à nouveau ici) donc l'intégrale J converge.
Pour h, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\sin t}{\sqrt{t}+\cos t} &= \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \times \frac{1}{1+\frac{\cos t}{\sqrt{t}}}\\ &= \frac{\sin t}{\sqrt{t}} - \frac{\sin(2t)}{2t} + \underset{t\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)\end{aligned}$$

L'intégrale K est convergente comme somme d'intégrales convergentes d'après ce qui précède.

Exercice 7 *(Oral Mines-Ponts, PC)*. Étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \ln x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Réponse. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin x \ln x}{x}$ est continue sur $]0,+\infty[$. De plus :

$$\frac{\sin x \ln x}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \ln x$$

et $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$ converge donc par comparaison de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.
Par le changement de variable $t = \ln x$ de classe C^1 et bjectif, les intégrales

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x \ln x}{x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} t\sin(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t$$

sont de même nature. On considère les fonctions :

$$u'(t) = \mathrm{e}^t \sin(\mathrm{e}^t) \qquad v(t) = \frac{t}{\mathrm{e}^t}$$
$$u(t) = -\cos(\mathrm{e}^t) \qquad v'(t) = \frac{1-t}{\mathrm{e}^t}$$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[1,+\infty[$ et :

$$u(t)v(t) = \frac{-\cos(\mathrm{e}^t)(1-t)}{\mathrm{e}^t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \quad \text{limite finie}$$

Les intégrales

$$\int_1^{+\infty} t\sin(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \cos(\mathrm{e}^t)\frac{1-t}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$$

sont de même nature. Or :

$$\cos(\mathrm{e}^t)\frac{1-t}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} t\sin(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t$ puis $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ puis $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ convergent.

Calculs d'intégrales

Exercice 8 *(Oral Mines Télécom, PC)*. Définition et calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 9 *(Oral Mines-Ponts, PC)*. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$.

(a) Justifier la définition de I_n.
(b) Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.
(c) En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

Réponse. La fonction $t \mapsto \dfrac{t}{(1+t^2)^n}$ est continue sur $[0,+\infty[$. De plus :

$$\frac{1}{(1+t^2)^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}} = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

or $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{-2}\,\mathrm{d}t$ converge donc l'intégrale I_n est convergente. On considère les fonctions :

$$u'(t) = 1 \qquad v(t) = \frac{1}{(1+t^2)^n}$$
$$u(t) = t \qquad v'(t) = \frac{-2nt}{(1+t^2)^{n+1}}$$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ et pour $n \geqslant 1$:

$$u(t)v(t) = \frac{t}{(1+t^2)^n} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \quad \text{limite finie}$$
$$u(0)v(0) = 0$$

On peut donc réaliser l'intégration par parties dans l'intégrale convergente I_n et on obtient :

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^{+\infty} + 2n\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t \\ &= 2n\int_0^{+\infty}\frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t \\ &= 2nI_n - 2nI_{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi, $2nI_{n+1} = (2n-1)I_n$. On itère cette relation en partant de I_n avec $n \geqslant 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1} \\ &= \frac{(2n-3)(2n-5)}{(2n-2)(2n-4)}I_{n-2} \\ &\vdots \\ &= \frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 1}{(2n-2)(2n-4)\cdots 2}I_1 \end{aligned}$$

On multiplie numérateur et dénominateur par les termes $(2n-2),(2n-4),\ldots,2$ de manière à obtenir une factorielle au numérateur. Au dénominateur, en factorisant les 2 qui apparaissent, on pourra également faire apparaitre une factorielle :

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5)\cdots 2\cdot 1}{(2n-2)^2(2n-4)\cdots 2^2}I_1 \\ &= \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}(n-1)!^2}\cdot\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Exercice 10 *(Oral Mines Télécom, PC).* $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(\cos(x))\,\mathrm{d}x$, $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x$.

(a) Justifier la convergence de l'intégrale J.

(b) Démontrer la convergence de l'intégrale I et établir que $I = J$.

(c) Calculer $I + J$. En déduire I.

Exercice 11. Soient $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$. On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx$.

(a) Montrer que l'intégrale I est convergente.

(b) Soit $h > 0$. Montrer que : $\displaystyle\int_h^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx = \int_{ah}^{bh} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$.

(c) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t} - 1}{t}\,dt$ converge.

(d) En déduire la valeur de I.

Réponse. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$. On a :

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \frac{1 + ax + \underset{x\to 0}{o}(x) - 1 - bx + \underset{x\to 0}{o}(x)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{(b-a)x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} b - a$$

La fonction f est donc prolongeable par continuité en 0 donc l'intégrale I est faussement impropre en 0. Comme a et b sont strictement positifs, on a :

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

et $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{-2}\,dx$ converge donc par comparaison de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx$ converge. On en déduit que l'intégrale I converge. Pour $h > 0$, on a :

$$\int_h^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx = \int_h^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{x}\,dx - \int_h^{+\infty} \frac{e^{-bx}}{x}\,dx$$

Ceci est légitime car ces deux intégrales sont convergentes puisque :

$$\frac{e^{-ax}}{x} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
$$\frac{e^{-bx}}{x} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

On réalise dans la première intégrale le changement de variable affine $t = ax$ et dans la deuxième le changement de variable affine $t = bx$. On obtient :

$$\begin{aligned}\int_h^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx &= \int_{ah}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt - \int_{bh}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt\\ &= \int_{ah}^{bh} \frac{e^{-t}}{t}\,dt\end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t} - 1}{t}$ est continue sur $]0, 1]$ et prolongeable par continuité en 0 puisque :

$$\frac{e^{-t} - 1}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{-t}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} -1$$

Par conséquent, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t} - 1}{t}\,dt$ converge. On a alors :

$$\begin{aligned}I &= \lim_{h\to 0} \int_h^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx\\ &= \lim_{h\to 0} \int_{ah}^{bh} \frac{e^{-t}}{t}\,dt\\ &= \lim_{h\to 0} \left(\int_{ah}^{bh} \frac{e^{-t} - 1}{t}\,dt + \int_{ah}^{bh} \frac{1}{t}\,dt\right)\\ &= \lim_{h\to 0} \int_{ah}^{bh} \frac{e^{-t} - 1}{t}\,dt + \ln\frac{b}{a}\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}\int_{ah}^{bh} \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt &= \int_{ah}^{1} \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt + \int_{1}^{bh} \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt\\ &= \int_{ah}^{1} \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt - \int_{bh}^{1} \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt\\ &\xrightarrow[h\to 0]{} \int_{0}^{1} \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt - \int_{0}^{1} \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt = 0\end{aligned}$$

car ces deux intégrales sont convergente. On en déduit que $I = \ln \frac{b}{a}$.

Intégrales et séries

Exercice 12. Démontrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}\,dt$ est divergente.

Réponse. La fonction $f : t \mapsto \frac{\sin^2 t}{t}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$. On propose deux méthodes pour l'étude de $\int_\pi^{+\infty} f(t)\,dt$.
Méthode 1, en utilisant une série. On définit :

$$F : x \mapsto \int_1^x \frac{\sin^2 t}{t}\,dt$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 t}{t}\,dt$$

Comme f est positive, F est croissante sur $]0,+\infty[$ et $\int_\pi^{+\infty} f(t)\,dt$ converge si, et seulement si, F admet une limite finie en $+\infty$. Or pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$F(n\pi) = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

On a par ailleurs :

$$\begin{aligned}a_k &= \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin^2 t}{t}\,dt = \int_0^\pi \frac{\sin^2(u+k\pi)}{u+k\pi}\,du \quad \text{changement de variable affine } u = t-k\pi\\ &= \int_0^\pi \frac{\sin^2 u}{u+k\pi}\,dt \geqslant \frac{1}{(k+1)\pi}\int_0^\pi \sin^2 u\,du\end{aligned}$$

On pose $C = \int_0^\pi \sin^2 u\,du$, C est une constante, positive et non nulle (car $\sin^2$ n'est pas identiquement nulle sur $[0,\pi]$). On a :

$$\frac{C}{(k+1)\pi} \leqslant a_k$$

et $\sum \frac{1}{k+1}$ diverge donc $\sum a_k$ diverge donc

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

n'admet pas de limite finie lorsque $n \to +\infty$ donc $F(n\pi)$ n'admet pas de limite finie lorsque $n \to +\infty$ donc $F(x)$ n'admet pas de limite finie lorsque $x \to +\infty$ donc $\int_\pi^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge donc $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge.

Méthode 2, avec une formule de trigonométrie. On a :

$$\cos(2t) = 1 - 2\sin^2 t$$
$$\frac{\sin^2 t}{t} = \frac{1-\cos(2t)}{2t}$$

On démontre comme en classe que

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t$$

converge (avec une intégration par parties) et on sait que $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge donc

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}\,\mathrm{d}t$$

diverge comme somme d'une intégrale convergente et d'une intégrale divergente.

Exercice 13. Discuter, suivant $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$.

Réponse. Pour cet exercice, on se contente de donner quelques éléments de réponse.

- La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^{\alpha}}$ est continue sur $[1, +\infty[$.
- Le changement de variable $x = \sqrt{t}$, de classe C^1 et bijectif sur $[1, +\infty[$ permet de se ramener à l'étude de l'intégrale :

$$J_{\beta} = \int_{1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi x)}{x^{\beta}}\,\mathrm{d}x$$

- Si $\beta > 1$, par comparaison avec l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^{\beta}}\,\mathrm{d}t$, l'intégrale J_{β} converge.
- Si $\beta = 0$, par un calcul direct de primitive, l'intégrale J_{β} diverge.
- Si $0 < \beta \leqslant 1$, par intégration par parties on se ramène à l'intégrale :

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x^{\beta+1}}\,\mathrm{d}x$$

  et par comparaison avec $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^{\beta+1}}\,\mathrm{d}t$, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x^{\beta+1}}\,\mathrm{d}x$ converge puis J_{β} converge.
- Si $\beta < 0$, on pose $b = -\beta > 0$ et pour $n \geqslant 1$:

$$u_n = \int_{n}^{n+1} x^{b} \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x$$

  Par changement de variable affine, on obtient :

$$u_n = (-1)^n \int_{0}^{1} (t+n)^{b} \sin(\pi t)\,\mathrm{d}t$$

  puis :

$$|u_n| = \int_{0}^{1} (t+n)^{b} \sin(\pi t)\,\mathrm{d}t \geqslant n^{b} \underbrace{\int_{0}^{1} \sin(\pi t)\,\mathrm{d}t}_{>0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

  Par conséquent, la série $\sum u_n$ diverge puis l'intégrale J_{β} diverge.
- Conclusion : l'intégrale J_{β} converge si, et seulement si, $\beta = 2\alpha - 1 > 0$ et l'intégrale de départ converge si, et seulement si, $\alpha > 1/2$.

Exercice 14.

(a) Pour $x > 0$, justifier l'existence de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ et $g(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

(b) Démontrer que pour $N \in \mathbb{N}^*$, $t \in]0,1[$ et $x > 0$:

$$\sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n t^{x+n-1} = \frac{t^{x-1}}{1+t} - (-1)^N \frac{t^{x+N-1}}{1+t}$$

(c) Démontrer que $f(x) = g(x)$.

Réponse.

(a) Soit $x > 0$. **Existence de** $f(x)$ **:**

- Pour $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n \frac{(-1)^n}{n+x} = \frac{1}{n+x}$ est de signe constant positif;
- $\left|\frac{(-1)^n}{n+x}\right| = \frac{1}{n+x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$;
- La suite $(1/n+x)$ est décroissante.

D'après le théorème des séries alternées, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+x}$ converge donc $f(x)$ est bien défini.

Existence de $g(x)$**.** La fonction :

$$t \mapsto \frac{t^{x-1}}{1+t} = \frac{\exp((x-1)\ln t)}{1+t}$$

est définie, continue et positive sur $]0,1]$. De plus :

$$\frac{t^{x-1}}{1+t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$$

Comme $1-x<1$, $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}\,\mathrm{d}t$ converge donc par comparaison de fonctions positives, $g(x)$ est bien défini.

(b) Pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0,1]$, on a les relations :

$$\sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n t^n = \frac{1}{1+t} - \frac{(-1)^N t^N}{1+t} \quad \text{car } 1+t \neq 0$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n t^{x+n-1} = \frac{t^{x-1}}{1+t} - \frac{(-1)^N t^{x+N-1}}{1+t}$$

(c) Les fonctions qui interviennent sont intégrables sur $]0,1]$ (la justification est la même que pour g) et on a :

$$\sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \left(\int_0^1 t^{x+n-1}\,\mathrm{d}t\right) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t - (-1)^N \int_0^1 \frac{t^{x+N-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

autrement dit :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n}{n+x} = g(x) - (-1)^N \int_0^1 \frac{t^{x+N-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

Du plus, on a :

$$\left|\int_0^1 \frac{t^{x+N-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 t^{x+N-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+N} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

et :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n}{n+x} \xrightarrow[N\to+\infty]{} f(x)$$

Par passage à la limite quand $N \to +\infty$, on obtient alors que $f(x) = g(x)$, pour tout $x > 0$.

Exercice 15 *(Oral Centrale, PSI)*. Établir $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2 \ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Réponse. La fonction :

$$f : t \mapsto \frac{t^2 \ln t}{t^2-1}$$

est continue sur $]0,1[$. De plus :

$$\frac{t^2 \ln t}{t^2-1} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$
$$\frac{t^2 \ln t}{t^2-1} = \frac{t^2 \ln(1+(t-1))}{(t-1)(t+1)} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{t^2 (t-1)}{(t-1)(t+1)} = \frac{t^2}{t+1} \xrightarrow[t\to 1]{} \frac{1}{2}$$

La fonction f est donc prolongeable par continuité en 0 et 1, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
Il sera utile pour la suite de définir la fonction $\widetilde{f}$, prolongement par continuité de f sur $[0,1]$:

$$\begin{array}{rlcl} \widetilde{f}: & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x \in]0,1[& \mapsto & \dfrac{t^2 \ln t}{t^2-1} \\ & 0 & \mapsto & 0 \\ & 1 & \mapsto & 1/2 \end{array}$$

La fonction $\widetilde{f}$ est alors continue sur $[0,1]$.
On a pour $t \in]0,1[$:

$$\frac{t^2 \ln t}{t^2-1} = -\sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n+2} \ln t$$

en écrivant $\dfrac{1}{1-t^2}$ comme la somme d'une série géométrique et ainsi :

$$\int_0^1 \frac{t^2 \ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n+2} \ln t\right)\mathrm{d}t$$

Il faut donc justifier que l'on peut intervertir la série et l'intégrale. On fait donc apparaitre les sommes partielles en considérant un entier $N \in \mathbb{N}$ et en écrivant :

$$\forall t \in]0,1[,\ \sum_{n=0}^{N} t^{2n} = \frac{1}{1-t^2} - \frac{t^{2N+2}}{1-t^2}$$

En multipliant par $-t^2 \ln t$, on obtient :

$$\forall t \in]0,1[,\ \frac{t^2 \ln t}{t^2-1} = -\sum_{n=0}^{N} t^{2n} \ln t + \frac{t^{2N+4} \ln t}{t^2-1}$$

On peut alors écrire :

$$\int_0^1 \frac{t^2 \ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=0}^{N} \underbrace{\left(\int_0^1 t^{2n} \ln t\,\mathrm{d}t\right)}_{=I_n} + \underbrace{\int_0^1 \frac{t^{2N+4} \ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t}_{=J_N}$$

à condition que toutes les intégrales I_n et J_N soient convergentes. Comme la fonction $t \mapsto t^{2n+2} \ln t$ est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0, l'intégrale I_n est bien convergente. De même, en reprenant la fonction f définie au début, la fonction $t \mapsto t^{2N+2} f(t)$ est continue sur $]0,1[$ et prolongeable par continuité en 0 et en 1 donc l'intégrale J_n est convergente. L'écrire ci-dessus est donc bien légitime. Soit $x \in]0,1]$, par intégration par parties avec les fonctions $t \mapsto \ln t$ et $t \mapsto t^{2n+1}$, de classe C^1 sur $]0,1]$:

$$\begin{aligned}\int_x^1 t^{2n} \ln t \,\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1} \ln t\right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t^{2n}}{2n+1}\,\mathrm{d}t = -\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\ln x - \left[\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)^2}\right]_0^1 \\ &= -\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\ln x - \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2} \\ &\xrightarrow[x\to 0]{} \frac{-1}{(2n+1)^2}\end{aligned}$$

On en déduit que $I_n = -1/(2n+1)^2$ et ainsi :

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(2n+1)^2} = \int_0^1 \frac{t^2 \ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t - \underbrace{\int_0^1 \frac{t^{2N+4}\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t}_{=J_N}$$

Enfin, la fonction $\widetilde{f}$ étant continue sur le segment $]0,1[$, elle est bornée sur $[0,1]$ et il existe ainsi M tel que $0 \leqslant f(t) \leqslant M$ pour tout $t \in]0,1[$. On a donc :

$$0 \leqslant J_N = \int_0^1 t^{2N+2} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M \int_0^1 t^{2N+2}\,\mathrm{d}t = \frac{M}{2N+3} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

Par encadrement, $J_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ et ainsi :

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(2n+1)^2} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{t^2\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$$

La série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ est donc convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \int_0^1 \frac{t^2 \ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$$

Remarque pour les 5/2 : on peut aussi appliquer le théorème d'échange série intégrale (avec convergence dominée).

Fonctions définies par des intégrales

Exercice 16 *(Oral Mines-Ponts, PC, 2017)*. On pose, lorsque l'intégrale est définie,

$$f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

(a) Donner le domaine de définition de f, étudier sa monotonie.
(b) Calculer $f(x) + f(x+1)$. En déduire un équivalent en f en $+\infty$.

Réponse.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \dfrac{t^{-x}}{1+t}$ est continue sur $[1,+\infty[$. De plus :

$$\frac{t^{-x}}{1+t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{x+1}}$$

L'intégrale de Riemann

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1}} \, \mathrm{d}t$$

converge si, et seulement si, $x+1>1$ *i.e.* $x>0$. Par comparaison de fonctions positives, f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
On considère $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$ avec $x<y$. Pour $t \in [1,+\infty[$, on a alors $t^x \leqslant t^y$ donc :

$$\frac{t^{-y}}{1+t} \leqslant \frac{t^{-x}}{1+t}$$

puis, par croissance de l'intégrale, $f(y) \leqslant f(x)$. La fonction f est donc décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

(b) Pour $x>0$:

$$f(x)+f(x+1) = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t^x(1+x)} + \frac{1}{t^{x+1}(1+t)} \right) \mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} t^{-x-1} \, \mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{x} t^{-x} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x}$$

On a ensuite par décroissance de f, toujours pour $x>0$:

$$2f(x+1) \leqslant f(x)+f(x+1) \leqslant 2f(x)$$
$$f(x+1) \leqslant \frac{1}{2x} \leqslant f(x)$$

Considérons $x>1$, on a alors :

$$\frac{1}{2x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2(x-1)}$$

On a :

$$\frac{1}{2(x-1)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$$

donc par encadrement, on a l'équivalent $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.

Exercice 17 *(Oral Centrale, PC, 2013 partiel)*. Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x \to +\infty$ avec :

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$$

Réponse. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$ et :

$$\mathrm{e}^{-t^2} = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}(\mathrm{e}^{-t})$$

L'intégrale de référence $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$ converge donc par comparaison de fonction positives, $\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$ converge quel que soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$. Pour $x>0$, on écrit :

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{-1}{2}(-2t\mathrm{e}^{-t^2}) \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t$$

On réalise dans cette intégrale convergente une intégration par parties avec les fonctions :

$$u(t) = \frac{-1}{2t} \qquad u'(t) = \frac{1}{2t^2}$$
$$v'(t) = -2t\mathrm{e}^{-t^2} \qquad v(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et :

$$u(t)v(t) = \frac{-e^{-t^2}}{2t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

On a alors :

$$f(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2}\,dt$$

Pour $x>0$, on définit :

$$g(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x}$$
$$h(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2}\,dt$$

de sorte que $f(x) = g(x) - h(x)$. On va démontrer que $h(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(g(x))$. Pour cela on encadre le quotient :

$$0 \leqslant \frac{h(x)}{g(x)} = xe^{x^2}\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{t^2}\,dt$$

Pour pouvoir intégrer facilement, on fait apparaitre l'expression te^{-t^2} (qui est la dérivée par rapport à t de e^{-t^2} à une constante près) :

$$0 \leqslant \frac{h(x)}{g(x)} = xe^{x^2}\int_x^{+\infty}\frac{te^{-t^2}}{t^3}\,dt$$

Or, pour $t \geqslant x$, $\frac{1}{t^3} \leqslant \frac{1}{x^3}$, donc par croissance de l'intégrale :

$$0 \leqslant \frac{h(x)}{g(x)} \leqslant xe^{x^2}\int_x^{+\infty}\frac{te^{-t^2}}{x^3}\,dt = \frac{e^{x^2}}{x^2}\underbrace{\int_x^{+\infty} te^{-t^2}\,dt}_{=e^{-x^2}/2} = \frac{1}{2x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Ainsi, $h(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(g(x))$, donc $f(x) = g(x) + \underset{x\to+\infty}{o}(g(x))$. On en déduit que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$, c'est à dire :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}$$

Exercice 18 *(Oral Polytechnique, PC, 2009).* Soit $f : x \mapsto \int_x^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{t}\,dt$.

(a) Déterminer le domaine de définition de f. La fonction f est-elle dérivable ?

(b) Montrer que $x \mapsto e^{x^2}f(x)$ est bornée sur $[1,+\infty[$.

(c) Donner un équivalent de $f(x)$ en 0^+.

(d) L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ est-elle convergente ?

Exercice 19. On définit l'ensemble :

$$E = \left\{ f \in \mathrm{C}^{\infty}([0,+\infty[,\mathbb{C}) \mid \forall n \in \mathbb{N},\ \exists k \geqslant 0,\ f^{(n)}(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}(t^k) \right\}$$

(a) Démontrer que pour tout $f \in E$ et tout $p > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Pour $f \in E$, on définit donc une nouvelle fonction notée $\mathscr{L}f$, appelée transformée de Laplace de f et définie sur $]0,+\infty[$ en posant :

$$\forall p > 0,\ \mathscr{L}f(p) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t$$

(b) Soit f une fonction appartenant à E. Démontrer que $f' \in E$ et que, pour tout réel $p > 0$:

$$\mathscr{L}(f')(p) = p\mathscr{L}(f)(p) - f(0)$$

Réponse.

(a) Soient $f \in E$ et $p > 0$, on définit $g : t \mapsto \mathrm{e}^{-pt} f(t)$. Cette fonction est continue sur $[0,+\infty[$. Par hypothèse, il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}(t^k)$. Ainsi :

$$t^2 \left|g(t)\right| = t^2 \mathrm{e}^{-pt} \left|f(t)\right| \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}(t^{k+2}\mathrm{e}^{-pt})$$

Par croissances comparées (et comme $p > 0$), $t^{k+2}\mathrm{e}^{-pt} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, donc :

$$\left|g(t)\right| \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

L'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} t^{-2}\,\mathrm{d}t$ converge, donc par comaraison de fonctions positives, l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument, donc converge.

(b) Soit $f \in E$, par définition de E il est clair que $f' \in E$. Alors, pour $p > 0$:

$$\mathscr{L}f(p) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\mathscr{L}(f')(p) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt} f'(t)\,\mathrm{d}t$$

Pour faire le lien entre ces deux quantités, on réalise une intégration par parties. On considère les fonctions :

$$u'(t) = f'(t) \qquad v(t) = \mathrm{e}^{-pt}$$
$$u(t) = f(t) \qquad v'(t) = -p\mathrm{e}^{-pt}$$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ et :

$$u(0)v(0) = f(0)$$
$$u(t)v(t) = f(t)\mathrm{e}^{-pt} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \quad \text{(limite finie)}$$

car on a démontré plus haut que $g(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$. On peut alors réaliser une intégration par parties dans l'intégrale convergente $\mathscr{L}(f')(p)$ et on obtient :

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(f')(p) &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt} f'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\mathrm{e}^{-pt} f(t)\right]_0^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -f(0) + p\mathscr{L}f(p)\end{aligned}$$

Indications

Ex 1. Utiliser des équivalents aux bornes où l'intégrale est généralisée.

Ex 2. Établirs des comparaisons aux bornes où l'intégrale est généralisée.

Ex 3. Utiliser des équivalents aux bornes où l'intégrale est généralisée. Pour l'étude en 1, on peut :

- Soit démontrer, en revenant à la définition, que l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$ converge ;
- Soit utiliser un changement de variable pour ramener le problème en 0.

Ex 4. (1) On peut revenir à la définition d'une intégrale convergente (l'intégrale se calcule). (2) Effectuer une comparaison, en utilisant l'intégrale précédente. (3) Utiliser des équivalents aux bornes où l'intégrale est généralisée.

Ex 5. Effectuer des comparaisons aux bornes où l'intégrale est généralisée.

Ex 6. l'intégrale I est donc faussement impropre en 0. Pour I et J : étude simple en 0 et intégration par parties en $+\infty$. Pour K, établir un développement asymptotique du type :

$$\frac{\sin t}{\sqrt{t}+\cos t} = \frac{\sin t}{\sqrt{t}} + a\frac{\sin t \cos t}{t} + \underset{t\to+\infty}{\mathrm{O}}(\cdots)$$

et utiliser les intégrales précédentes.

Ex 7. Étude en 0 avec un équivalent. Étude en $+\infty$: changement de variable $t = \ln x$ puis faire une intégration par parties en écrivant la fonction $(t\mathrm{e}^{-t})(\mathrm{e}^t \sin(\mathrm{e}^t))$.

Ex 8. Convergence : utiliser des comparaisons aux bornes où l'intégrale est généralisée. Calcul : utiliser un changement de variable pour démontrer que les intégrales

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

sont opposées et conclure.

Ex 9. (a) Comparaisons aux bornes où l'intégrale est généralisée. (b) On peut partir de I_n et réaliser une intégration par parties. (c) Écrire I_n en fonction de I_{n-1}, remplacer I_{n-2} avec I_{n-2}, etc et dérouler ainsi jusqu'à aboutir à I_1. Simplifier les produits qui apparaissent.

Ex 10. (a) Établir une comparaison à la borne où l'intégrale est généralisée. (b) Utiliser un changement de variable pour obtenir une relation entre I et J. (c) Utiliser un changement de variable pour simplifier $I+J$.

Ex 11. (a) Effectuer des comparaisons aux bornes où l'intégrale est généralisée. (b) Séparer l'intégrale en deux et effectuer des changements de variable. (c) Étudier le comportement de la fonction aux bornes où l'intégrale est généralisée. (d) Utiliser les questions précédentes.

Ex 12. Utiliser les intégrales I_n sur les intervalles $[n\pi,(n+1)\pi]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant une minoration, montrer que la série $\sum I_n$ diverge.

Ex 13. Changement de variable $x = \sqrt{t}$. Traiter le cas $2\alpha - 1 > 1$ avec une comparaison en $+\infty$. Traiter le cas $0 < 2\alpha - 1 \leqslant 1$ avec une intégration par parties. Traiter le cas $2\alpha - 1 \leqslant 0$ en faisant intervenir une série.

Ex 14. (a) Méthode usuelle pour $f(x)$. Comparaison pour $g(x)$. (b) Reconnaitre la somme des termes d'une suite géométrique. (c) Intégrer l'expression obtenue.

Ex 15. Commencer par justifier la convergence de chaque quantité. Faire apparaitre des sommes partielles de série géométrique :

$$\forall t \in]0,1[, \ \frac{t^2 \ln t}{t^2-1} = -\sum_{n=0}^{N} t^{2n} \ln t + \frac{t^{2N+4} \ln t}{t^2-1}$$

Ex 16. Démontrer l'encadrement $2f(x+1) \leqslant f(x)+f(x+1) \leqslant 2f(x)$.

Ex 17. Établir que $f(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{2x} - \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2} \, dt$.

Ex 18. (a) Méthodes usuelles. (b) Utiliser une intégration par parties pour trouver une autre expression de $f(x)$ permettant d'établir un encadrement de $e^{x^2} f(x)$. (c) Utiliser la relation de Chasles en 1 et faire apparaitre $e^{-t^2} - 1$. (d) Utiliser des comparaisons.

Ex 19. (a) Utiliser des comparaisons aux bornes où l'intégrale est généralisée. (b) Utiliser une intégration par parties.