TD 11 : Espaces vectoriels normés

Exemples de normes et de propriétés associées

Exercice 1. On pose $E = \mathbb{C}[X]$ et pour $P \in E$:

$$N_\infty(P) = \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k| \quad \text{en posant} \quad P = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k$$
$$N_1(P) = \int_0^1 |P(t)|\,\mathrm{d}t$$

(a) Démontrer que N_1 et N_∞ sont deux normes sur E.
(b) Calculer $N_1(X^n)$ et $N_\infty(X^n)$.
(c) Les normes N_1 et N_∞ sont-elles équivalentes ?

Exercice 2. On pose $E = \mathbb{R}[X]$ et pour $P \in E$:

$$N_\infty(P) = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$$
$$N_2(P) = \left(\int_0^1 P(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

(a) Démontrer que N_2 et N_∞ sont deux normes sur E.
(b) Calculer $N_2(X^n)$ et $N_\infty(X^n)$.
(c) Les normes N_2 et N_∞ sont-elles équivalentes ?

Exercice 3. On considère l'application :

$$N : \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{R} \\ A = (a_{ij}) & \mapsto & \max\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} \left|a_{ij}\right| \end{array}$$

(a) Démontrer que N est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
(b) Déterminer un réel $C \geqslant 0$ tel que, quels que soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $N(AB) \leqslant C N(A) N(B)$.

Exercice 4. Soient E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme notée $\|\ \|$ et $\mathscr{B}$ une base de E notée $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$. On définit l'application :

$$N : \begin{array}{rcl} \mathscr{L}(E) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \|f(e_1)\| + \cdots + \|f(e_n)\| \end{array}$$

Démontrer que N est une norme sur $\mathscr{L}(E)$.

Exercice 5. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pose $E = \mathbb{R}[X]$ et pour $P \in E$:

$$N(P) = \sum_{k\in\mathbb{N}} |u_k a_k| \quad \text{en notant} \quad P = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante, portant sur la suite (u_n), pour que N soit une norme sur E.

Quelques problèmes relatifs aux espaces vectoriels normés

Problème 6 *(La norme 1 n'est pas associée à un produit scalaire).*

(1) On suppose que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $\langle\ ,\ \rangle$ et on note $\|\ \|$ la norme associée. Démontrer que :

$$\forall u, v \in E,\ \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

(2) On considère l'application $\|\ \|_1$ définie sur $\mathbb{R}^2$ en posant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$$

Démontrer que cette norme n'est pas associée à un produit scalaire.

Problème 7 *(Suite matricielle).* Soient (A_n) une suite de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On considère les propositions :

$$(P_1)\quad \forall n \in \mathbb{N},\ A_n \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R});\qquad (P_2)\quad A_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} A;\qquad (P_3)\quad A_n^{-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} B;\qquad (P_4)\quad A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$$

(1) Lorsque les conditions $(P_1), (P_2), (P_3)$ sont satisfaites, étudier la suite $(A_n \times A_n^{-1})$.
(2) Démontrer que si $(P_1), (P_2), (P_3)$ sont vraies, alors (P_4) est vraie et $A^{-1} = B$.
(3) Déterminer le comportement de la suite $(2^{-n}\mathrm{I}_p)$.
(4) Les conditions (P_1) et (P_2) impliquent-elles (P_4) ?

Problème 8 *(Introduction à la convergence uniforme).* On note E l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et bornées. Pour $f \in E$, on note :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on définit $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+1+x^2}$ et $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(x)$.

(1) Démontrer que $\|\ \|_\infty$ est une norme sur E.
(2) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note alors $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x)$.

(3) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |S(x) - S_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
(4) En déduire que $\|S - S_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Problème 9 *(Suite de polynômes de degrés majorés).* On considère $n \in \mathbb{N}^*$, des réels a et b avec $a < b$ et $a_0, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts appartenant au segment $[a, b]$ et $(L_0, \dots, L_n)$ la famille des polynômes d'interpolation de Lagrange associés aux réels $a_0, \dots, a_n$. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, on pose :

$$N(P) = \sum_{i=0}^{n} |P(a_i)| \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction et (P_k) est une suite de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$. On suppose que :

$$\forall x \in [a, b],\ P_k(x) \xrightarrow[k\to+\infty]{} f(x)$$

(1) Démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$.
(2) On pose $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} f(a_i) L_i$. Pour $i \in [\![0, n]\!]$, calculer $P(a_i)$.
(3) Démontrer que $N(P_k - P) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.
(4) En déduire que $\|P_k - P\|_\infty \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.
(5) Démontrer que : $\forall x \in [a, b],\ f(x) = P(x)$.

Indications

Ex 1. Méthodes usuelles vues en classe.

Ex 2. Méthodes usuelles vues en classe.

Ex 3. (a) Méthode usuelle. (b) Poser $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et considérer les coefficients du produit $M = AB$ pour majorer $N(M)$.

Ex 4. Que peut-on dire d'une application linéaire f définie sur E telle que pour $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E on a $f(e_1) = \cdots = f(e_n) = 0$?

Ex 5. Montrer que, sans condition, N est bien définie, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, homogène et vérifie l'inégalité triangulaire. Déterminer quelle condition imposer sur la suite (u_n) pour que l'on ait l'implication $N(P) = 0 \Rightarrow P = 0$.

Pb 6. (1) Calculer les normes en revenant à la définition avec le produit scalaire, simplifier. (2) Prendre $u = (1,0)$ et $v = (0,1)$ dans $\mathbb{R}^2$. Calculer $2\|u\|_1{}^2 + 2\|v\|_1{}^2$ et $\|u+v\|_1{}^2 + \|u-v\|_1{}^2$.

Pb 7. (1) Produit de suites convergentes. (2) Unicité de la limite. (3) Calcul direct. (4) Regarder si la suite (A_n) avec $A_n = 2^{-n}\mathrm{I}_p$ vérifier (P_1), (P_2) et (P_4).

Pb 8. (1) Méthode usuelle. (2) Théorème des séries alternées. (3) Majoration du reste. (4) Majorrer $\|S - S_n\|_\infty$ est conclure.

Pb 9. (1) Méthode usuelle. (2) Cours sur l'interpolation. (3) Utiliser le fait que $N(P_k - P)$ est la somme des $|P_k(a_i) - f(a_i)|$ est l'hypothèse sur P_k et f. (4) Considérer la suite (P_k) dans $\mathbb{R}_n[X]$ avec les normes N et $\| \ \|_\infty$ qui sont équivalentes. (5) Démontrer que $P_k(x) \xrightarrow[k\to+\infty]{} P(x)$.