TD 5 : Révisions et compléments sur les espaces vectoriels

Les exercices notés •sont faisables avec le programme de première année, en incluant les révisions faites en classe.

Projecteurs et symétries, sous-espaces supplémentaires

•Exercice 1.

(a) Démontrer que les sous-espaces vectoriels $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = 0\}$ et $G = \mathbb{R}_0[X]$ sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Déterminer le projecteur sur F parallèlement à G.

•Exercice 2.

(a) Démontrer que l'application f canoniquement associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

est un projecteur de $\mathbb{R}^3$.

(b) Déterminer les sous-espaces associés.

•Exercice 3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle, on définit l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & X + \operatorname{tr}(X)A \end{array}$$

Montrer que f est linéaire puis déterminer à quelles conditions l'application f ainsi définie est une symétrie. En donner alors les éléments caractéristiques.

•Exercice 4 *(Oral CCP, PSI, 2009)*. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f + f^4 = 0$. Montrer que : $\operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f) = E$.

•Exercice 5 *(Oral Mines-Ponts, PSI, 2009)*. Soient E et F deux espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,E)$. On suppose que $v \circ u = \mathrm{id}_E$. Montrer que $\operatorname{Ker}(v) \oplus \operatorname{Im}(u) = F$.

•Exercice 6. Soient $a, b \in \mathbb{K}$ avec $a \neq b$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $(f - a\mathrm{id}) \circ (f - b\mathrm{id}) = 0$. Démontrer que $\operatorname{Ker}(f - a\mathrm{id})$ et $\operatorname{Ker}(f - b\mathrm{id})$ sont des sous-espaces supplémentaires de E.
Réponse. Comme f est un endomorphisme de E, $\operatorname{Ker}(f - a\mathrm{id})$ et $\operatorname{Ker}(f - b\mathrm{id})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
Analyse. Soit $x \in E$, on suppose qu'il existe $y \in \operatorname{Ker}(f - a\mathrm{id})$ et $z \in \operatorname{Ker}(f - b\mathrm{id})$ tels que $x = y + z$. Alors $f(y) = ay$, $f(z) = bz$ donc $f(x) = ay + bz$. On a deux équations permettant de déterminer y et z en fonction de x et $f(x)$:

$$\begin{aligned} ax - f(x) &= ay + az - ay - bz = (a-b)z \\ bx - f(x) &= by + bz - ay - bz = (b-a)y \end{aligned}$$

Par hypothèse, $a \neq b$, donc :

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{b-a}(bx - f(x)) = \frac{1}{a-b}(f - b\mathrm{id})(x) \\ z &= \frac{1}{a-b}(ax - f(x)) = \frac{1}{b-a}(f - a\mathrm{id})(x) \end{aligned}$$

On a donc l'unicité de la décomposition, *sous réserve d'existence.*
Synthèse. Soit $x \in E$, on pose :

$$y = \frac{1}{a-b}(f - b\mathrm{id})(x)$$
$$z = \frac{1}{b-a}(f - a\mathrm{id})(x)$$

On vérifie facilement que $y + z = x$. Ensuite :

$$(f - a\mathrm{id})(y) = \frac{1}{a-b}(f - a\mathrm{id}) \circ (f - b\mathrm{id})(x) = 0$$
$$(f - b\mathrm{id})(z) = \frac{1}{b-a}(f - b\mathrm{id}) \circ (f - a\mathrm{id})(x) = 0$$

car $f - a\mathrm{id}$ et $f - b\mathrm{id}$ commutent et $(f - a\mathrm{id}) \circ (f - b\mathrm{id}) = 0$. On en déduit que $y \in \mathrm{Ker}(f - a\mathrm{id})$ et $z \in \mathrm{Ker}(f - b\mathrm{id})$.
Conclusion. Tout élément de E s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de $\mathrm{Ker}(f - a\mathrm{id})$ et d'un élément de $\mathrm{Ker}(f - b\mathrm{id})$ donc $E = \mathrm{Ker}(f - a\mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - b\mathrm{id})$.

Exercice 7 *(Oral CCP, PC, 2016 (partiel)).* Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n. Soient $f_1, f_2, \dots, f_k$ avec $2 \leqslant k \leqslant n$, k endomorphismes non nuls de E tels que :

- Pour tout $(i, j) \in [\![1, k]\!]^2$ et $i \neq j$, $f_i \circ f_j = 0$;
- $f_1 + \cdots + f_k = \mathrm{id}_E$.

(1) Calculez $f_i \circ (f_1 + f_2 + \cdots + f_k)$. En déduire que f_i est un projecteur.
(2) Montrez que la somme $\mathrm{Im}(f_1) + \cdots + \mathrm{Im}(f_k)$ est directe.
(3) En déduire que $E = \mathrm{Im}(f_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(f_k)$.

Réponse.

(1) Par hypothèse $f_i \circ (f_1 + \cdots + f_k) = f_i \circ \mathrm{id} = f_i$. Par ailleurs, en utilisant les propriétés des opérations $\circ$ et $+$ dans $\mathscr{L}(E)$:

$$f_i \circ (f_1 + \cdots + f_k) = f_i \circ f_1 + f_i \circ f_2 + \cdots + f_i \circ f_k = \sum_{j=1}^{k} f_i \circ f_j$$
$$= f_i \circ f_i + \sum_{j \neq i} \underbrace{f_i \circ f_j}_{=0} = f_i^2$$

On a ainsi $f_i = f_i^2$ donc f_i est un projecteur de E.

(2) Pour $i \in [\![1, k]\!]$, considérons $y_i \in \mathrm{Im}(f_i)$ et supposons que :

$$y_1 + \cdots + y_k = 0$$

Par définition, il existe $x_i \in E$ tel que $y_i = f_i(x_i)$ et ainsi :

$$f_1(x_1) + \cdots + f_k(x_k) = 0$$

On applique f_i, il vient :

$$f_i\big(f_1(x_1) + \cdots + f_k(x_k)\big) = f_i(0) = 0$$

et par linéarité de f_i :

$$f_i \circ f_1(x_1) + \cdots + f_i \circ f_k(x_k) = 0$$

À nouveau, $f_i \circ f_j = 0$ pour $i \neq j$ et il ne reste que $f_i^2(x_i) = f_i(x_i) = 0$ c'est à dire $y_i = 0$. Par conséquent, $y_1 = \cdots = y_k = 0$ et ceci montre que la somme $\mathrm{Im}(f_1) + \cdots + \mathrm{Im}(f_k)$ est directe.

(3) Considérons maintenant $x \in E$, alors :

$$x = \mathrm{id}(x) = f_1(x) + \cdots + f_k(x) \in \mathrm{Im}(f_1) + \cdots + \mathrm{Im}(f_k)$$

Ceci montre que tout $x \in E$ peut s'écrire comme somme d'éléments de $\mathrm{Im}(f_1), \ldots, \mathrm{Im}(f_k)$. Ainsi, $E = \mathrm{Im}(f_1) + \cdots + \mathrm{Im}(f_k)$ et comme la somme est directe, on a $E = \mathrm{Im}(f_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(f_k)$.

Équations linéaires

•**Exercice 8.**

(a) Déterminer les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 1$$

(b) Déterminer les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 1$$

•**Exercice 9.** Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X+1) - P(X) = X$.
Réponse. C'est une équation linéaire.
Résolution de l'équation homogène $P(X+1) - P(X) = 0$ notée (H). Considérons un polynôme P solution de (H), on a alors $P(X+1) = P(X)$ donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(k+1) = P(k)$. La suite $(P(k))$ est donc constante égale à $P(0)$. Le polynôme $Q = P - P(0)$ admet donc une infinité de racines et il est par conséquent nul. On en déduit que P est constant. Réciproquement, si P est constant alors $P(X+1) = P(X)$ donc P est solution de (H). L'ensemble des solutions de (H) est $\mathbb{R}_0[X]$.
Recherche d'une solution particulière de l'équation $P(X+1) - P(X) = X$ notée (E). On la cherche sous la forme $P = aX^2 + bX + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. On obtient :

$$P(X+1) - P(X) = 2aX + a + b$$

Il suffit alors de prendre $a = 1/2$ et $b = -1/2$ pour que P soit solution particulière de (E).
Conclusion. Les solutions de (E) sont les polynômes de la forme :

$$P = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + c$$

avec $c \in \mathbb{R}$.

•**Exercice 10.** Déterminer les fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+2\pi) - f(x) = x^2$.
Réponse. C'est une équation linéaire.
Résolution de l'équation homogène. Les solutions sont les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+2\pi) - f(x) = 0$$

Il s'agit des fonctions 2π-périodiques (et on ne peut pas dire tellement mieux).
Recherche d'une solution particulière. On cherche cette solution sous la forme $f : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ (il n'est pas utile d'ajouter un terme constant car il se simplifiera directement en écrivant $f(x+2\pi) - f(x)$). On a après calcul :

$$f(x+2\pi) - f(x) = 6a\pi x^2 + 2\pi\,(6a\pi + 2b)\,x + 4b\pi^2 + 2c\pi + 8a\pi^3$$

On peut donc prendre :

$$a = \frac{1}{6\pi}$$
$$b = -\frac{1}{2}$$
$$c = \frac{2\pi}{6}$$

de manière à avoir $f(x+2\pi) - f(x) = x^2$.
Conclusion. Les solutions sont les fonctions f de la forme :

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{6\pi}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{2\pi}{6} + h(x)$$

avec $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique quelconque.

Exercice 11.
(a) Déterminer les matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $X + X^\top = \mathrm{I}_n$.
(b) Déterminer les matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $X - X^\top = \mathrm{I}_n$.

Exercice 12 *(Oral Mines-Ponts, PC, 2009).* Soient A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ avec $A \neq 0$. Déterminer les matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $M + \mathrm{tr}(M)A = B$.
Réponse. On note l'équation :

$$(E) \quad M + \mathrm{tr}(M)A = B$$

et on note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (E).
Méthode 1 : en utilisant les équations linéaires. On pose :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & M + \mathrm{tr}(M)A \end{array}$$

Par linéarité de la trace, l'application f est linéaire, donc (E) est une équation linéaire.
Résolution de l'équation homogène :

$$(H) \quad M + \mathrm{tr}(M)A = 0$$

L'ensemble des solutions de (H) est $\mathrm{Ker}\, f$. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned} M \in \mathrm{Ker}(f) &\iff M + \mathrm{tr}(M)A = 0 \iff M = -\mathrm{tr}(M)A \\ &\implies M \in \mathrm{Vect}(A) \end{aligned}$$

Ceci montre que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Vect}(A)$. Réciproquement, considérons $M \in \mathrm{Vect}(A)$, il existe alors $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $M = \lambda A$. Ainsi :

$$f(M) = \lambda A + \mathrm{tr}(\lambda A)A = \lambda A + \lambda\,\mathrm{tr}(A)A = \lambda(1 + \mathrm{tr}(A))A$$

On a supposé $A \neq 0$. Si $1 + \mathrm{tr}(A) = 0$, alors $f(M) = 0$ et ainsi $M \in \mathrm{Ker}(f)$, on a donc dans ce cas $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(A)$. Si $1 + \mathrm{tr}(A) \neq 0$, alors $f(M) = 0$ si, et seulement si, $\lambda = 0$ si, et seulement si, $M = 0$, on a donc dans ce cas $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. L'ensemble des solutions de (H) est donc $\{0\}$ si $1 + \mathrm{tr}(A) \neq 0$ et $\mathrm{Vect}(A)$ si $1 + \mathrm{tr}(A) = 0$.
Recherche d'une solution particulière de (E)**.** Si M est solution de (E), alors $M = B - \mathrm{tr}(M)A$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $M = B + \lambda A$ (toute solution de (E) est donc de la forme $B + \lambda A$). Réciproquement, considérons $M = B + \lambda A$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$, alors :

$$M + \mathrm{tr}(M)A - B = B + \lambda A + \mathrm{tr}(B + \lambda A)A - B = \lambda A + (\mathrm{tr}(B) + \lambda\,\mathrm{tr}(A))A = (\lambda(1 + \mathrm{tr}(A)) + \mathrm{tr}(B))A$$

On a supposé $A \neq 0$. Si $1+\mathrm{tr}(A) \neq 0$, alors en posant :

$$\lambda = -\frac{\mathrm{tr}(B)}{1+\mathrm{tr}(A)}$$

la matrice M est solution particulière de (E). Si $1+\mathrm{tr}(A) = 0$ et $\mathrm{tr}(B) = 0$ alors toute valeur de λ convient, en particulier B est solution particulière de (E). Enfin, si $1+\mathrm{tr}(A) = 0$ et $\mathrm{tr}(B) \neq 0$, il n'y a aucune valeur de λ qui convient donc aucune matrice de la forme $B+\lambda A$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ n'est solution de (E). Or, on a remarqué que toute solution de (E) est de la forme $B+\lambda A$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$, par conséquent (E) ne possède aucune solution.
Conclusion :

— si $1+\mathrm{tr}(A) = 0$ et $\mathrm{tr}(B) \neq 0$, alors $\mathscr{S} = \emptyset$;

— si $1+\mathrm{tr}(A) = 0$ et $\mathrm{tr}(B) = 0$, alors $\mathscr{S} = B + \mathrm{Vect}(A)$;

— si $1+\mathrm{tr}(A) \neq 0$, alors $\mathscr{S} = B - \dfrac{\mathrm{tr}(B)}{1+\mathrm{tr}(A)}A$.

Méthode 2 : par analyse et synthèse.
Analyse. On suppose que M est une solution, on a alors $M = -\mathrm{tr}(M)A + B$ donc il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $M = \alpha A + B$.
Synthèse. On pose $M = \alpha A + B$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\mathrm{tr}(M) = \alpha\,\mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$$
$$M + \mathrm{tr}(M)A - B = \alpha A + B + (\alpha\,\mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B))A - B = (\alpha(1+\mathrm{tr}(A)) + \mathrm{tr}(B))A$$

Or $A \neq 0$ donc M est solution de (E) si, et seulement si :

$$\alpha(1+\mathrm{tr}(A)) + \mathrm{tr}(B) = 0$$

On distingue trois cas :

- Si $\mathrm{tr}(A) \neq -1$, alors la seule possibilité est $\alpha = \dfrac{-\mathrm{tr}(B)}{1+\mathrm{tr}(A)}$;
- Si $\mathrm{tr}(A) = -1$ et $\mathrm{tr}(B) = 0$, alors toute valeur de α convient ;
- Si $\mathrm{tr}(A) = -1$ et $\mathrm{tr}(B) \neq 0$, alors aucune valeur de α ne convient.

Conclusion. On retrouve les résultats obtenus avec la première méthode.

Rang, théorème du rang, matrices semblables

•**Exercice 13**. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice non nulle telle que $A^2 = 0$.
(a) Déterminer le rang de A.
(b) Démontrer que A est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Réponse. Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A.
(a) Comme $A^2 = 0$, on a $f^2 = 0$. On a $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ donc $0 \leqslant \mathrm{rg}\, f \leqslant 2$. Si $\mathrm{rg}(f) = 0$, alors f est nulle donc A est nulle et ceci est exclu dans l'énoncé. On a donc $\mathrm{rg}(f) \geqslant 1$. Si $\mathrm{rg}(f) = 2$, alors f est surjective donc bijective puisque c'est un endomorphisme en dimension finie. On a $f \circ f = 0$ et en composant à gauche par f^{-1} on aurait $f^{-1} \circ f \circ f = 0$ donc $f = 0$ et à nouveau ceci est impossible. On a donc $\mathrm{rg}(f) = 1$.
(b) L'application f n'est pas nulle, donc il existe $e_1 \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(e_1) \neq 0$. On pose $e_2 = f(e_1)$. On a alors $f(e_2) = f(f(e_1)) = 0$. Montrons que la famille $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. On considère une combinaison linéaire nulle :

$$\alpha e_1 + \beta e_2 = 0$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On applique f, sachant que $f(e_1) = e_2$ et $f(e_2) = 0$ on obtient :

$$\alpha e_2 = 0$$

Comme $e_2 \neq 0$, on a $\alpha = 0$ puis $\beta e_2 = 0$ donc $\beta = 0$. La famille (e_1, e_2) est libre et de cardinal 2 et $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ donc $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Par construction, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = B$ donc B est semblable à A (car ces deux matrices représentent le même endomorphisme dans deux bases de $\mathbb{R}^2$).

•**Exercice 14.** Démontrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Réponse. Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A. On note $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. **Analyse.** On suppose qu'il existe $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ base de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = B$. Ceci signifie $f(u_1) = 0$, $f(u_2) = u_1$ et $f(u_3) = u_2$ autrement dit :

$$\begin{aligned} Au_1 &= 0 \\ Au_2 &= u_1 \\ Au_3 &= u_2 \end{aligned}$$

Le vecteur u_1 doit appartenir à $\mathrm{Ker}\, A$. On note que $\mathrm{rg}(A) = 2$ donc $\dim \mathrm{Ker}\, A = 1$, on remarque tout de suite que $Ae_1 = 0$ (Ae_1 est la première colonne de A) ; on prend donc pour la suite $u_1 = e_1$. On cherche ensuite u_2 tel que $Au_2 = u_1 = e_1$; on remarque directement que $Ae_2 = -e_1$ (Ae_2 est la deuxième colonne de A) ; on prend donc pour la suite $u_2 = -e_2$. Enfin on cherche u_3 tel que $u_3 = u_2$. On note $u_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$Au_3 = u_2 \iff \begin{cases} -y + z = 0 \\ -z = -1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

On peut donc prendre (par exemple) $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Synthèse. Vérifions que la famille $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$:

$$\det_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Ainsi, $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Par construction, on a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = B$.
Conclusion. La matrice B est semblable à A (car ces deux matrices représentent le même endomorphisme dans deux bases de $\mathbb{R}^3$).

Exercice 15. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{rg}(A) = 1$. On pose $t = \mathrm{tr}(A)$.

(a) Démontrer que A est semblable à une matrice M de la forme $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & ? \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & ? \\ 0 & \cdots & 0 & t \end{pmatrix}$.

Applications :

(b) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{rg}(A) = 1$. Démontrer que $A^2 = \mathrm{tr}(A)A$.
(c) Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $\mathrm{rg}(AB - BA) = 1$. Montrer que $(AB - BA)^2 = 0$.

•**Exercice 16** *(Oral CCP, PC, 2013)*. Soient $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ et $h \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$. On suppose que $\mathrm{rg}(h) = 2$ et $h = f \circ g$. Montrer que $\mathrm{rg}(g) = \mathrm{rg}(f) = 2$.
Réponse. Le théorème du rang donne :

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}\, f &= 2 - \dim \mathrm{Ker}\, f \\ \mathrm{rg}\, g &= 3 - \dim \mathrm{Ker}\, g \\ \mathrm{rg}\, h &= 3 - \dim \mathrm{Ker}\, h\end{aligned}$$

En particulier, on a $\mathrm{rg}\, f \leqslant 2$. Considérons $x \in \mathrm{Im}\, h$, il existe alors $y \in \mathbb{R}^3$ tel que $x = h(y)$. On a donc $x = f(g(y))$ donc $x = f(y')$ en posant $y' = g(y)$. On en déduit que $x \in \mathrm{Im}\, f$ et ceci montre que $\mathrm{Im}\, h \subset \mathrm{Im}\, f$. On a donc $\dim \mathrm{Im}\, h \leqslant \dim \mathrm{Im}\, f$ soit $\mathrm{rg}\, h \leqslant \mathrm{rg}\, f$ et ainsi $2 \leqslant \mathrm{rg}\, f$. On a donc $\mathrm{rg}\, f = 2$.
Sur le même principe, si $x \in \mathrm{Ker}\, g$, alors $g(x) = 0$ donc $h(x) = f(g(x)) = f(0) = 0$ et ainsi $x \in \mathrm{Ker}\, h$. On en déduit que $\mathrm{Ker}\, g \subset \mathrm{Ker}\, h$. On a donc en particulier $\dim \mathrm{Ker}\, g \leqslant \dim \mathrm{Ker}\, h$. D'après le théorème du rang appliqué à h, on a $\dim \mathrm{Ker}\, h = 1$ puisque $\mathrm{rg}\, h = 2$. Ainsi $\dim \mathrm{Ker}\, g \leqslant 1$. De plus, $\mathrm{rg}\, g \leqslant 2$ car g est à valeur dans $\mathbb{R}^2$ donc le théorème du rang appliqué à g donne $\dim \mathrm{Ker}\, g \geqslant 1$ et finalement $\dim \mathrm{Ker}\, g = 1$ d'où $\mathrm{rg}\, g = 2$.

•**Exercice 17**. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ avec E de dimension finie. Démontrer l'équivalence :

$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, f \iff \left(f^2 = 0 \text{ et } \dim E = 2\,\mathrm{rg}\, f\right)$$

•**Exercice 18**. Soit E de dimension finie et $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f+g$ est bijectif et $g \circ f = 0$. Démontrer que $\mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g = \dim E$.
Réponse. On a $g \circ f = 0$ donc $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g$ (cf. un exercice d'illustration du cours). On a donc avec le théorème du rang :

$$\mathrm{rg}\, g + \mathrm{rg}\, f \leqslant \mathrm{rg}\, g + \dim \mathrm{Ker}\, g = \dim E$$

On a toujours :

$$\mathrm{Im}(f+g) = \left\{(f+g)(x) \mid x \in E\right\} \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$$

Comme $f+g$ est bijective, on a $\mathrm{Im}(f+g) = E$ donc :

$$\dim E = \dim \mathrm{Im}(f+g) \leqslant \dim(\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)) \leqslant \dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Im}\, g$$

Par double inégalité, $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) = \dim E$.

Sous-espaces stables

Exercice 19. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 = \mathrm{id}_E$. Démontrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id})$ sont des sous-espaces supplémentaires de E et stables par f.
Réponse. Comme $f - \mathrm{id}$ et $f^2 + f + \mathrm{id}$ sont des endomorphismes de E, $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
Analyse. Soit $x \in E$ et supposons qu'il existe y et z dans E tels que $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ et $z \in \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id})$. Alors :

$$\begin{aligned}f(y) &= y \\ f^2(z) &= -f(z) - z \\ x &= y + z \\ f(x) &= y + f(z) \\ f^2(x) &= y - f(z) - z\end{aligned}$$

On a donc $3y = x + f(x) + f^2(x)$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{3}(\mathrm{id} + f + f^2)(x) \\ z &= x - y \end{aligned}$$

La décomposition d'un élément de E en somme d'éléments de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id})$ est donc unique, *sous réserve d'existence.*
Synthèse. Soit $x \in E$, on pose :

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{3}(\mathrm{id} + f + f^2)(x) \\ z &= x - y \end{aligned}$$

On a alors immédiatement $y + z = x$. Par ailleurs :

$$(f - \mathrm{id})(y) = \frac{1}{3}(f - \mathrm{id}) \circ (f^2 + f + \mathrm{id})(x) = \frac{1}{3}(f^3 - \mathrm{id})(x) = 0$$

donc $y \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$. Enfin, comme $f(y) = y$:

$$\begin{aligned} (f^2 + f + \mathrm{id})(z) &= (f^2 + f + \mathrm{id})(x) - (f^2 + f + \mathrm{id})(y) \\ &= (f^2 + f + \mathrm{id})(x) - (f^2(y) + f(y) + y) \\ &= (f^2 + f + \mathrm{id})(x) - 3y \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $z \in \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id})$. **Conclusion.** Tout élément de E se décompose de manière unique en somme d'un élément de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(f^2 + f + id)$, par conséquent $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id})$.
Posons $P = X - 1$ et $Q = X^2 + X + 1$, on a $\mathrm{Ker}(P(f)) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(Q(f)) = \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id})$ et d'après le cours, $\mathrm{Ker}(P(f))$ et $\mathrm{Ker}(Q(f))$ sont stables par f.

Exercice 20. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $p, f \in \mathscr{L}(E)$ avec p un projecteur. Montrer que :

$$f \circ p = p \circ f \iff \mathrm{Ker}\, p \text{ et } \mathrm{Im}\, p \text{ sont stables par } f$$

Exercice 21. On considère l'endomorphisme $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$.

(a) Démontrer que si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ stable par f et $P \in F$ est un polynôme de degré $d \in \mathbb{N}$, alors $\mathbb{R}_d[X] \subset F$.

(b) En déduire quels sont les sous-espaces de $\mathbb{R}[X]$ qui sont stables par f.

Réponse. On note que tous les $\mathbb{R}_n[X]$ pour $n \in \mathbb{N}$ sont stables par f. De plus, $\mathbb{R}[X]$ et $\{0\}$ sont également stables par f. On va montrer que ces sous-espaces stables sont les seuls.

(a) On suppose que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ stable par f et $P \in F$ est un polynôme de degré $d \in \mathbb{N}$. Alors par stabilité, les polynômes $P, P', P'', \dots, P^{(d)}$ sont dans F (les dérivées suivantes sont nulles). On a donc :

$$\mathrm{Vect}(P, P', \dots, P^{(d)}) \subset F$$

La famille $\mathscr{B} = (P, P', \dots, P^{(d)})$ est une famille d'éléments de $\mathbb{R}_d[X]$, elle est de plus échelonnée en degré et de cardinal $d + 1 = \dim \mathbb{R}_d[X]$; c'est par conséquent une base de $\mathbb{R}_d[X]$ et on a donc $\mathbb{R}_d[X] \subset F$.

(b) **Analyse.** Soit F un sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ stable par f. On suppose $F \neq \{0\}$. On distingue deux cas.

- S'il existe dans F des polynômes de degré d aussi grand que l'on veut, alors on a $\mathbb{R}_d[X] \subset F$ pour des valeurs de d aussi grandes que l'on veut. On a donc dans ce cas $F = \mathbb{R}[X]$.
- Sinon, il existe dans F un polynôme P de degré maximal d. On a donc $F \subset \mathbb{R}_d[X]$ (car le degré d a été pris le plus grand possible) mais d'après la question précédente, $\mathbb{R}_d[X] \subset F$. On a donc $F = \mathbb{R}_d[X]$.

Synthèse. On a déjà noté que les $\mathbb{R}_d[X]$ avec $d \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{R}[X]$ sont stables par f.

Conclusion. Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$ stables par f sont $\{0\}$, $\mathbb{R}[X]$ ainsi que les $\mathbb{R}_d[X]$ pour $d \in \mathbb{N}$.

Indications

Ex 1. (a) On peut utiliser l'intersection et la dimension. (b) Méthode usuelle.

Ex 2. Méthodes usuelles.

Ex 3. Caractérisation des symétries.

Ex 4. On peut par exemple utiliser l'intersection et les dimensions.

Ex 5. On peut procéder par analyse synthèse.

Ex 6. On peut procéder par analyse synthèse.

Ex 7. (1) Utiliser la caractérisation d'un projecteur. (2) Utiliser la définition d'une somme directe, appliquer f_i. (3) Utiliser la définition de sous-espaces supplémentaires, utiliser la propriété $f_1 + \cdots + f_k = \mathrm{id}$.

Ex 8. (a) Reconnaitre une équation linéaire. Résoudre l'équation homogène associée. Chercher une solution particulière constante. (a) Reconnaitre une équation linéaire. Résoudre l'équation homogène associée. Chercher une solution particulière sous la forme $u_n = Cn$ avec C une constante.

Ex 9. Chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 2. Démontrer que les solutions de l'équation homogène sont les polynômes constants.

Ex 10. Que dire des solutions de l'équation homogène ? On ne pourra pas dire mieux sur ce point. Chercher une solution particulère polynomiale. De quel degré ?

Ex 11. (a) Que dire des solutions de l'équation homogène ? Chercher une solution particulière très simple. (b) Considérer une solution et appliquer l'application tr. Que peut-on en déduire ?

Ex 12. Exercice plus difficile.

Ex 13. (a) Considérer f canoniquement associé. Théorème du rang. Quelle relation entre $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f$? (b) Démontrer qu'il existe (e_1, e_2) telle que $e_2 = f(e_1)$ et $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}(e_2)$.

Ex 14. Procéder par analyse et synthèse.

Ex 15. (a) On peut procéder par analyse et synthèse. (b) Calculer M^2. (c) Calculer $\mathrm{tr}(AB - BA)$.

Ex 16. Démontrer que $\mathrm{Im}\, h \subset \mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, g \subset \mathrm{Ker}\, h$. Utiliser le théorème du rang.

Ex 17. $\Rightarrow$: calculer $f \circ f(x)$ pour $x \in E$ et théorème du rang. Réciproque : démontrer que $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$; que dire des dimensions ?

Ex 18. Démontrer que $\mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g = E$. Quelle relation entre $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, g$? Théorème du rang pour g.

Ex 19. Analyse synthèse. Une fois posé $x = y + z$, $y \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ et $z \in \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id})$, on regardera ce que donne $x + f(x) + f^2(x)$.

Ex 20. Double implication. Pour la réciproque : montrer que $pf(x)$ et $fp(x)$ sont égaux lorsque $x \in \mathrm{Ker}\, p$ ou $x \in \mathrm{Im}\, p$ et utiliser le fait que $\mathrm{Ker}\, p$ et $\mathrm{Im}\, p$ sont supplémentaires.

Ex 21. (a) Démontrer que $\mathrm{Vect}(P, P', \ldots, P^{(d)}) \subset F$ et démontrer que $(P, P', \ldots, P^{(d)})$ est une base de $\mathbb{R}_d[X]$. (b) Considérer F sous-espace stable par f et distinguer suivant qu'il existe ou non un polynôme $P \in F$ de degré maximal.