TD 18 : Révisions (6) – Produit scalaire et espaces euclidiens

Produits scalaires avec des questions de convergence

Exercice 1.

(a) Démontrer que l'ensemble $E = \left\{(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n\geqslant 0} u_n^2 \text{ converge}\right\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(b) Pour $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ et $v = (v_n)_{n\geqslant 0}$ appartenant à E, on définit

$$\varphi(u, v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$$

Démontrer que φ est un produit scalaire sur E.

Exercice 2. Démontrer que $\varphi : (P, Q) \mapsto \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3.

(a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_{-1}^{1} \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ converge.

(b) Démontrer que l'application $\varphi : (P, Q) \mapsto \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Projections orthogonales

Dans les exercices qui suivent, répondre à la question « déterminer le projeté orthogonal » est un bon objectif.

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique, déterminer le projeté orthogonal de $u = \binom{1}{1}$ sur $D = \mathrm{Vect}\binom{1}{2}$. En déduire la distance de u à D.

Exercice 5. On considère $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on définit une application φ sur $E \times E$ par :

$$\forall (P, Q) \in E \times E,\ \varphi(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

(a) Démontrer que φ est un produit scalaire sur E.

(b) Démontrer que la famille $(1, X)$ est orthogonale. En déduire le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$.

(c) On prend dans cette question $n = 2$. Déterminer la matrice dans la base canonique de E de la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_1[X]$.

Exercice 6. On considère l'espace vectoriel $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et pour $A, B \in E$ on définit :

$$\varphi(A, B) = \mathrm{tr}(A^\top B)$$

(a) Démontrer que si on note $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$, alors :

$$\varphi(A, B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$$

En déduire que φ est un produit scalaire sur E.

(b) On pose $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer un réel α tel que les matrices $J - \alpha \mathrm{I}_n$ et I_n soient orthogonales.

(c) On pose $K = \begin{pmatrix} (0) & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & (0) \end{pmatrix}$. Déterminer le projeté orthogonal de K sur $\mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n, J)$.

Exercice 7 *(D'après oral CCP, PC, 2018)*. On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire canonique. Dans $\mathbb{R}^4$, on définit le plan $\mathscr{P}$ par les équations

$$\begin{cases} x-y+z+t=0 \\ x-y-2z-t=0 \end{cases}$$

(a) Trouver une base orthonormale du plan $\mathscr{P}$.
(b) Déterminer le projeté orthogonal du vecteur $u=(1,0,-1,0)$ sur le plan $\mathscr{P}$.
(c) Déterminer la distance du vecteur $u=(1,0,-1,0)$ au plan $\mathscr{P}$.

Exercice 8. On considère $E=\mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ et on définit une application φ sur $E\times E$ par :

$$\forall (f,g)\in E\times E,\ \varphi(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

(a) Démontrer que φ est un produit scalaire sur E.
(b) Soit u la fonction constante égale à 1. Déterminer le projeté orthogonal de u sur $F=\mathrm{Vect}(\sin,\cos)$.
(c) Déterminer la distance de u à F et en déduire $\inf\limits_{a,b\in\mathbb{R}} \int_{-\pi}^{\pi}(1-a\cos(t)-b\sin(t))^2\,\mathrm{d}t$.

Exercice 9 *(D'après oral Centrale, PSI)*.
(a) Démontrer que l'application $\varphi : (P,Q)\mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
(b) Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$.
(c) Déterminer la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$ et en déduire la valeur de

$$\inf\left\{\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}(t^2-at-b)^2\,\mathrm{d}t,\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Exercice 10.
(a) Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire canonique pour deux vecteurs $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ et $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$.
(b) En déduire que pour $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}^{+*}$ tels que $a_1+\cdots+a_n=1$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\geqslant n^2$$

et étudier le cas d'égalité.

Exercice 11.
(a) Soient a et b deux réels avec $a<b$. On considère l'espace vectoriel $E=\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[a,b]$ et on définit une application φ sur $E\times E$ par la relation :

$$\forall f,g\in E,\ \varphi(f,g)=\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Démontrer que φ est un produit scalaire sur E.
(b) Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour ce produit scalaire pour deux fonctions f et g éléments de E. En déduire que pour une fonction $u\in E$ strictement positive sur $[a,b]$:

$$\int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t\times\int_a^b\frac{1}{u(t)}\,\mathrm{d}t\geqslant(b-a)^2.$$

Indications

Ex 1. (a) Démontrer que $|u_n v_n| \leqslant \dfrac{u_n^2 + v_n^2}{2}$.

Ex 2. Convergence de l'intégrale : démontrer que $\left|P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\right| \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\mathrm{e}^{-t/2}\right)$ (par exemple).

Ex 3. Démontrer que pour commencer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ converge.

Ex 4. Utiliser une formule donnant le projeté orthogonal (attention aux conditions d'application) puis le théorème faisant le lien entre le projeté orthogonal et la distance.

Ex 5. (b) Utiliser une formule donnant le projeté orthogonal (attention aux conditions d'application). (c) Déterminer le projeté orthogonal des vecteurs 1, X et X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$.

Ex 6. (c) Utiliser une formule donnant le projeté orthogonal (attention aux conditions d'application).

Ex 7. (b) Utiliser une formule donnant le projeté orthogonal (attention aux conditions d'application). (c) Utiliser le théorème faisant le lien entre le projeté orthogonal et la distance.

Ex 8. (b) Utiliser une formule donnant le projeté orthogonal (attention aux conditions d'application). (c) Utiliser le théorème faisant le lien entre le projeté orthogonal et la distance.

Ex 9. (a) Penser à établir la convergence de l'intégrale. (b) Utiliser une formule donnant le projeté orthogonal (attention aux conditions d'application). Il sera utile de calculer $\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. (c) Utiliser le théorème faisant le lien entre le projeté orthogonal et la distance.

Ex 10. (b) Utiliser la question (a).

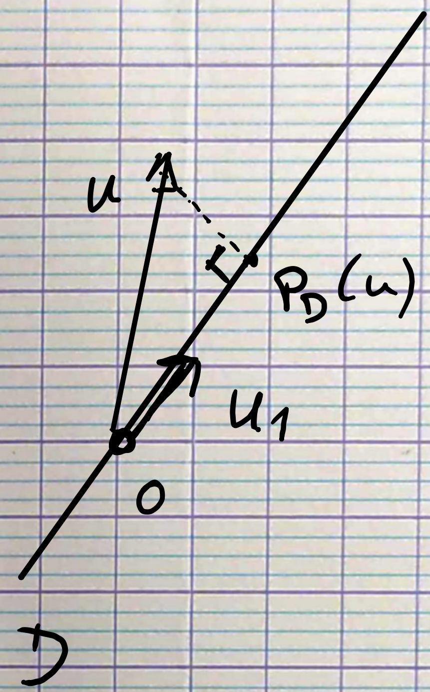
TD 18 :

Exercice 4 :

- $p_D(u)$ → projeté orthogonal de u sur D

$u_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ est une base de D.

$p_D(u) = a u_1 = \begin{pmatrix}a\\2a\end{pmatrix}$



$u = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ donc $u - p_D(u) = \begin{pmatrix}1-a\\1-2a\end{pmatrix}$

Or $u - p_D(u) \perp D$

Donc $\langle u - p_D(u), u_1 \rangle = 0$

Donc $1 - a + 2 - 4a = 0$

$$a = \frac{3}{5}$$

Donc $\boxed{p_D(u) = \frac{3}{5}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}$

- $d(u, D) = \|u - p_D(u)\| = \sqrt{\langle u - p_D(u), u - p_D(u) \rangle}$

$u - p_D(u) = \begin{pmatrix}1 - \frac{3}{5}\\ 1 - \frac{6}{5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\ -\frac{1}{5}\end{pmatrix}$

$d(u, D) = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{1}{25}} = \sqrt{\frac{5}{25}} = \sqrt{\frac{1}{5}}$

$\boxed{d(u, D) = \frac{1}{\sqrt{5}}}$