



## TD 20 : Endomorphismes des espaces euclidiens

Dans tous les exercices,  $E$  est un espace euclidien de dimension  $n$  et l'espace  $\mathbb{R}^n$  est muni de sa structure euclidienne canonique.

Le théorème spectral

**Exercice 1** (Résultat préliminaire au théorème spectral). Soit  $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . On considère  $\lambda \in \mathbb{C}$  une valeur propre de  $M$  et  $z \in \mathbb{C}^n$  un vecteur propre pour  $M$  associé à  $\lambda$ . On pose :

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{z} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{pmatrix}$$

- (a) Calculer de deux manières différentes  $(M\bar{z})^\top z$  et en déduire que  $\bar{\lambda} = \lambda$ .
- (b) En déduire que  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \neq \emptyset$ .

**Exercice 2.** Soit  $n \geq 3$ . On considère la matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont les coefficients de la première ligne et la première colonne sont tous égaux à 1 et les autres coefficients sont nuls. Justifier que  $A$  est diagonalisable. Démontrer que 0 est valeur propre de  $A$  et multiplicité  $n - 2$ . Calculer  $\text{tr } A$  et  $\text{tr}(A^2)$  et en déduire les autres valeurs propres de  $A$ .

**Exercice 3** (Oral Mines-Ponts, PC, 2005). Déterminer les matrices  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  qui vérifient  $A^3 = I_n$ .  
*Réponse.* Supposons que  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $A^3 = I_n$ . Alors  $A$  est diagonalisable et  $X^3 - 1$  est annulateur de  $A$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  une valeur propre de  $A$ , on a alors  $\lambda^3 = 1$  donc  $\lambda = 1$  (la fonction  $x \mapsto x^3$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ). Par conséquent  $\text{Sp}(A) = \{1\}$ . Il existe une matrice  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  telle que  $D = P^{-1}AP$  est diagonale et comme  $\text{Sp}(A) = \{1\}$ , on a  $D = I_n$  donc  $A = PDP^{-1} = I_n$ . Réciproquement, si  $A = I_n$ , alors  $A$  est symétrique réelle et  $A^3 = I_n$ . Par conséquent, il existe une unique matrice  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^3 = I_n$ , c'est la matrice  $A = I_n$ .

**Exercice 4** (Oral CCP, PSI, 2018).

- (a) Montrer que si  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifie  $XX^\top X = I_n$ , elle est inversible et symétrique.
- (b) Trouver toutes les matrices  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant  $XX^\top X = I_n$ .

**Exercice 5.** Soit  $f$  un endomorphisme autoadjoint de  $E$ . Existe-t-il un endomorphisme  $g$  autoadjoint de  $E$  tel que  $g^5 = f$ ?

*Réponse.* L'endomorphisme  $f$  est autoadjoint, il est donc diagonalisable. Considérons  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  base orthonormée de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $f$ , associés aux valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ . On définit l'endomorphisme  $g$  en donnant les images des vecteurs de la base  $\mathcal{B}$ ; plus précisément on définit  $g$  comme étant l'unique endomorphisme de  $E$  tel que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, g(e_i) = \sqrt[5]{\lambda_i} e_i$$

(remarque : l'application  $x \mapsto x^5$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , elle réalise donc une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$  et l'application  $x \mapsto \sqrt[5]{x}$  est sa réciproque, définie sur  $\mathbb{R}$ ). On a alors :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, g^5(e_i) = \sqrt[5]{\lambda_i}^5 e_i = \lambda_i e_i = f(e_i)$$

Ainsi, les endomorphismes  $g^5$  et  $f$  coïncident sur la base  $\mathcal{B}$  de  $E$ , ils sont donc égaux. Comme la matrice de  $g$  dans la base orthonormée  $\mathcal{B}$  est symétrique (elle est en fait diagonale), l'endomorphisme  $g$  est autoadjoint. Par conséquent, il existe un endomorphisme autoadjoint  $g$  de  $E$  tel que  $g^5 = f$ .

**Exercice 6.** Démontrer que si  $f$  et  $g$  sont deux endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien  $E$  qui commutent alors il existe  $\mathcal{B}$  base de  $E$  constituée de vecteurs propres à la fois pour  $f$  et  $g$ .

*Réponse.* L'endomorphisme  $f$  est autoadjoint donc diagonalisable. On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  les valeurs propres distinctes de  $f$ , on a alors :

$$E = E_{\lambda_1}(f) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}(f)$$

Considérons  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$  et posons  $E_i = E_{\lambda_i}(f)$  (pour simplifier), c'est un sous-espace propre de  $f$  et par hypothèse  $f$  et  $g$  commutent, on sait donc que dans ce cas,  $E_i$  est stable par  $g$ . On note  $g_i$  l'endomorphisme de  $E_i$  induit par  $g$ . On peut considérer sur  $E_i$  le produit scalaire de  $E$ . L'endomorphisme  $g$  étant autoadjoint, on a alors :

$$\forall x, y \in E_i, \langle g_i(x), y \rangle = \langle g(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle = \langle x, g_i(y) \rangle$$

On en déduit que  $g_i$  est un endomorphisme autoadjoint de  $E_i$ . Il existe donc  $\mathcal{B}_i$  base de  $E_i$  dont les éléments sont des vecteurs propres pour  $g_i$ . Les éléments de  $\mathcal{B}_i$  sont donc des vecteurs non nuls de  $E_i = E_{\lambda_i}(f)$ , ce sont donc également des vecteurs propres pour  $f$ . Par concaténation des bases, la réunion  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p$  est une base de  $E$  et d'après ce qui précède elle est constituée de vecteurs propres à la fois pour  $f$  et pour  $g$ .

**Exercice 7.**

- (a) Démontrer que si  $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $M^2 = 0$  alors  $M = 0$ .
- (b) Démontrer que si  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $M^\top M = 0$  alors  $M = 0$ .
- (c) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  avec  $n \geq 2$ . On suppose que  $AA^\top = A^\top A$  et que  $A^4 = 2A^2 - I_n$ . Montrer que  $A^2 = I_n$ .

**Exercice 8.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme autoadjoint. On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $f$  (comptées avec multiplicité) rangées dans l'ordre croissant  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ . Démontrer que :

$$\max \left\{ \frac{\langle f(x), x \rangle}{\|x\|^2} \mid x \in E \setminus \{0\} \right\} = \lambda_n$$

Établir un résultat analogue pour  $\lambda_1$ .

*Réponse.* Notons  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de vecteurs propres pour  $f$ , associés aux valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  en supposant les vecteurs de la base ordonnés de sorte que  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ . On a ainsi  $\min \text{Sp}(f) = \lambda_1$  et  $\max \text{Sp}(f) = \lambda_n$ . Soit  $x \in E$  noté :

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

On a alors  $f(x) = \lambda_1 x_1 e_1 + \dots + \lambda_n x_n e_n$  et comme la base  $\mathcal{B}$  est orthonormée :

$$\langle f(x), x \rangle = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 \leq \lambda_n (x_1^2 + \dots + x_n^2)$$

et de même :

$$\langle f(x), x \rangle = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 \geq \lambda_1 (x_1^2 + \dots + x_n^2)$$

Supposons  $x \neq 0$  de sorte que  $x_1^2 + \dots + x_n^2 > 0$ , on a alors :

$$\lambda_1 \leq \frac{\langle f(x), x \rangle}{\|x\|^2} \leq \lambda_n$$

On définit l'ensemble :

$$A = \left\{ \frac{\langle f(x), x \rangle}{\|x\|^2} \mid x \in E \setminus \{0\} \right\}$$

D'après ce qui précède,  $A$  est minorée par  $\lambda_1$  et majorée par  $\lambda_n$  de sorte que  $\lambda_1 \leq \inf A$  et  $\sup A \leq \lambda_n$ . Par ailleurs :

$$\lambda_1 = \frac{\langle f(e_1), e_1 \rangle}{\|e_1\|^2} \in A$$

$$\lambda_n = \frac{\langle f(e_n), e_n \rangle}{\|e_n\|^2} \in A$$

et ainsi  $\lambda_1 = \inf A$  et  $\sup A = \lambda_n$ .

Endomorphismes autoadjoints usuels

**Exercice 9** (Oral Centrale, PC, 2019). Soit  $a$  et  $b$  deux éléments de  $E$  non colinéaires. On pose, pour  $x \in E$ ,  $f(x) = \langle a, x \rangle b + \langle b, x \rangle a$ . Montrer que  $f$  est un endomorphisme autoadjoint de  $E$ . Déterminer ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.

**Exercice 10.** On considère  $E = \mathbb{R}_n[X]$  ainsi que les applications

$$\varphi : (P, Q) \in E^2 \mapsto \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} P(x) Q(x) dx \quad \text{et} \quad L : P \in E \mapsto (X^2 - 1)P'' + 3XP'$$

Démontrer que  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $E$  puis démontrer que l'application  $L$  est un endomorphisme de  $E$ , autoadjoint relativement au produit scalaire précédent.

Projecteur orthogonal, symétrie orthogonale

**Exercice 11.** On considère un vecteur unitaire  $u = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ . Déterminer la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  de la projection orthogonale sur  $\text{Vect}(u)$  puis celle de la symétrie orthogonale par rapport à  $\text{Vect}(u)^\perp$ .

*Réponse.* On note  $p$  le projecteur orthogonal sur  $\text{Vect}(u)$ . Comme  $\|u\| = 1$ ,  $(u)$  est une base orthonormée de  $\text{Vect}(u)$ . Ainsi, pour  $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$  :

$$p(v) = \langle u, v \rangle u = (a_1 x + a_2 y + a_3 z) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^2 x + a_1 a_2 y + a_1 a_3 z \\ a_2 a_1 x + a_2^2 y + a_2 a_3 z \\ a_3 a_1 x + a_3 a_2 y + a_3^2 z \end{pmatrix}$$

Notons  $\mathcal{C}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ , on a alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(p) = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_2 a_1 & a_2^2 & a_2 a_3 \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & a_3^2 \end{pmatrix} = (a_i a_j)_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$$

Notons  $M$  cette matrice, on sait que  $s = \text{id} - 2p$  donc :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(s) = I_3 - 2M = \begin{pmatrix} 1-2a_1^2 & -2a_1 a_2 & -2a_1 a_3 \\ -2a_2 a_1 & 1-2a_2^2 & -2a_2 a_3 \\ -2a_3 a_1 & -2a_3 a_2 & 1-2a_3^2 \end{pmatrix}$$

**Exercice 12** (Oral CCP, PC, 2018, Exercice secondaire). On considère  $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  canoniquement associé à

$$A = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & -6 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

- (1) L'endomorphisme  $u$  est-il autoadjoint? Déterminer  $\text{rg}(u - \text{id})$ .
- (2) L'endomorphisme  $u$  est-il un projecteur orthogonal? Quelle est l'image de  $u$ ?
- (3) Déterminer une base orthonormée de vecteurs propres pour  $u$ .

**Exercice 13.** On suppose  $n \geq 2$ . Démontrer que l'application linéaire canoniquement associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 1 & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ (0) & & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

est une symétrie orthogonale et préciser la dimension des sous-espaces caractéristiques.

*Réponse.* On note  $f$  l'application linéaire canoniquement associée à  $A$ . On a  $A^2 = I_n$  donc  $f$  est une symétrie. La matrice  $A$  est symétrique (et la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  est orthonormée) donc  $f$  est autoadjoint, donc les sous-espaces propres de  $f$  sont orthogonaux deux à deux. On a donc  $E_1(f) \oplus_\perp E_{-1}(f) = \mathbb{R}^n$  ce qui montre que  $f$  est une symétrie orthogonale. La matrice  $A$  est donc semblable à  $\text{diag}(I_p, -I_q)$  avec  $p = \dim \text{Ker}(f - \text{id})$  et  $q = \dim \text{Ker}(f + \text{id})$ . On a alors  $p + q = n$  et  $\text{tr}(A) = n - 2 = p - q$ . On en déduit que  $2n - 2 = 2p$  donc  $p = n - 1$  et  $q = 1$ .

Isométries vectorielles et matrices orthogonales

**Exercice 14.** Soit  $V \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . On définit la matrice  $H = I_n - \frac{2}{\|V\|^2} V V^\top$ .

- (a) Démontrer que  $H$  est une matrice symétrique et orthogonale.
- (b) Démontrer que l'application linéaire  $h$  canoniquement associée à  $H$  est une symétrie.
- (c) Démontrer  $h$  est la symétrie orthogonale par rapport au sous-espace  $V^\perp$ .

*Réponse.* On montre facilement que  $H$  est symétrique. Ensuite :

$$H^\top H = H^2 = I_n - \frac{4}{\|V\|^2} V V^\top + \frac{4}{\|V\|^4} \underbrace{V V^\top V V^\top}_{=\|V\|^2} = I_n - \frac{4}{\|V\|^2} V V^\top + \frac{4}{\|V\|^2} V V^\top = I_n$$

Donc  $H$  est orthogonale. Comme  $h^2 = \text{id}$ ,  $h$  est une symétrie. Comme  $h$  est autoadjoint, les sous-espaces propres  $\text{Ker}(h - \text{id})$  et  $\text{Ker}(h + \text{id})$  sont orthogonaux donc  $h$  est une symétrie orthogonale. Ensuite pour  $x \in \mathbb{R}^n$  :

$$h(x) = x \iff Hx = x \iff V V^\top x = 0 \iff \langle V, x \rangle V = 0 \iff x \perp V \iff x \in V^\perp$$

Ainsi,  $\text{Ker}(h - \text{id}) = V^\perp$  donc  $h$  est la symétrie orthogonale par rapport à  $V^\perp$ .

**Exercice 15** (Oral Mines-Ponts, PC, 2016). Soit  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices antisymétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

- (a) Soit  $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que le spectre de  $A$  est inclus dans  $i\mathbb{R}$ .
- (b) Montrer que l'application  $\Phi : M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \mapsto (M + I_n)(M - I_n)^{-1}$  réalise une bijection de  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  sur l'ensemble des matrices de  $O_n(\mathbb{R})$  qui n'ont pas pour valeur propre 1.

*Réponse.*

- (a) On considère  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$  et  $X = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$  un vecteur propre associé. On a alors  $AX = \lambda X$  et :

$$\begin{aligned} X^\top \overline{X} &= |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 > 0 \\ (AX)^\top \overline{X} &= (\lambda X)^\top \overline{X} = \lambda (|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2) \\ &= X^\top A^\top \overline{X} = -X^\top A \overline{X} = -X^\top \overline{AX} \quad \text{car } A \text{ est antisymétrique réelle} \\ &= -X^\top \overline{\lambda X} = -\overline{\lambda} (|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2) \end{aligned}$$

On en déduit que  $\lambda = -\overline{\lambda}$  donc  $\lambda \in i\mathbb{R}$ . Par conséquent  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset i\mathbb{R}$ .

(b) On procède en plusieurs étapes.

**L'application  $\Phi$  est bien définie.** Considérons  $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ , alors d'après la question précédente  $1 \notin \text{Sp}(M)$ , donc  $M - I_n$  est inversible et  $\Phi(M)$  est bien définie.

**L'application  $\Phi$  est à valeurs dans  $O_n(\mathbb{R})$ .** On considère toujours  $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  et on démontre que  $\Phi(M) \in O_n(\mathbb{R})$  :

$$\Phi(M)^\top \Phi(M) = (M - I_n)^\top{}^{-1} (M + I_n)^\top (M + I_n)(M - I_n)^{-1}$$

(notons que pour une matrice  $A$  inversible,  $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$ ). Ensuite :

$$\begin{aligned} \Phi(M)^\top \Phi(M) &= (-M - I_n)^{-1} (-M + I_n)(M + I_n)(M - I_n)^{-1} \\ &= (M + I_n)^{-1} (M - I_n)(M + I_n)(M - I_n)^{-1} \end{aligned}$$

Les matrices  $M + I_n$  et  $M - I_n$  commutent donc :

$$\Phi(M)^\top \Phi(M) = (M + I_n)^{-1} (M + I_n)(M - I_n)(M - I_n)^{-1} = I_n$$

donc  $\Phi(M) \in O_n(\mathbb{R})$ . On en déduit que  $\Phi$  est une application de  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  dans  $O_n(\mathbb{R})$ .

**Le nombre 1 n'est pas valeur propre de  $\Phi(M)$ .** On conserve les notations précédentes, on a :

$$\begin{aligned} \chi_{\Phi(M)}(1) &= \det(\Phi(M) - I_n) = \det((M + I_n)(M - I_n)^{-1} - I_n) = \det(((M + I_n) - (M - I_n))(M - I_n)^{-1}) \\ &= \det(2(M - I_n)^{-1}) \neq 0 \end{aligned}$$

On en déduit que 1 n'est pas valeur propre de  $\Phi(M)$ . Jusqu'à présent, on a obtenu que  $\Phi$  est une application définie sur  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  et à valeurs dans l'ensemble des matrices appartenant à  $O_n(\mathbb{R})$  et qui n'admettent pas 1 comme valeur propre.

**Caractère bijectif.** Considérons  $A \in O_n(\mathbb{R})$  telle que  $1 \notin \text{Sp}(A)$ . On considère  $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ , on a alors :

$$\begin{aligned} \Phi(M) = A &\iff (M + I_n)(M - I_n)^{-1} = A \\ &\iff M + I_n = A(M - I_n) \\ &\iff M + I_n = AM - A \\ &\iff (A - I_n)M = A + I_n \end{aligned}$$

Rappelons que  $A - I_n$  est inversible, ainsi :

$$\Phi(M) = A \iff M = (A - I_n)^{-1} (A + I_n)$$

Ceci montre que  $A$  possède au plus un antécédant par  $\Phi$ , c'est la matrice  $M = (A - I_n)^{-1} (A + I_n)$ .

Réciproquement, considérons une telle matrice  $M$ . On a :

$$\begin{aligned} M^\top &= (A + I_n)^\top ((A - I_n)^\top)^{-1} \\ &= (A^\top + I_n)(A^\top - I_n)^{-1} \\ &= (A^{-1} + I_n)(A^{-1} - I_n)^{-1} \\ &= (A^{-1} + I_n)AA^{-1}(A^{-1} - I_n)^{-1} \\ &= (I_n + A)A((A^{-1} - I_n)A)^{-1} \\ &= -M \end{aligned}$$

La matrice  $M$  est bien antisymétrique. Les équivalences précédentes montrent que  $M$  est l'unique antécédant de  $A$  par  $\Phi$ . L'application  $\Phi$  est donc bijective.

Matrices et endomorphismes symétriques positifs (attendre la fin du chapitre)

**Exercice 16** (Oral Mines-Ponts, PSI, 2019). On note  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  qui sont symétriques et telles que  $\text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}^+$ .

- (a) Montrer que pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $M = A^\top A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .
- (b) Réciproquement, montrer que si  $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ , alors il existe  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $M = A^\top A$ .

Réponse.

- (a) Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $M = A^\top A$ . Avec les propriétés de la transposée :

$$M^\top = (A^\top A)^\top = A^\top (A^\top)^\top = A^\top A = M$$

La matrice  $M$  est donc symétrique. De plus, pour  $X \in \mathbb{R}^n$  :

$$X^\top M X = X^\top A^\top A X = (AX)^\top (AX)$$

Rappelons que pour  $X, Y \in \mathbb{R}^n$ ,  $X^\top Y$  est leur produit scalaire canonique. Ainsi, en considérant la norme associée :

$$X^\top M X = \|AX\|^2 \geq 0$$

On a donc  $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .

- (b) Considérons  $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . La matrice  $M$  est symétrique réelle donc il existe  $P \in O_n(\mathbb{R})$  telle que  $D = P^\top M P$  est diagonale. On note  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , on a alors  $\text{Sp}(M) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  donc, par définition,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ . On pose pour la suite  $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$  pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $\Delta = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ . On a alors :

$$M = P D P^\top = P \Delta^2 P^\top = P \Delta P^\top P \Delta P^\top$$

Posons  $A = P \Delta P^\top$ , il est facile de vérifier que  $A$  est symétrique et ainsi  $M = A^2 = A^\top A$ .

**Exercice 17** (Oral Polytechnique, PC, 2009). Soit  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .

- (1) Soit  $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\langle Ax, x \rangle = 0$  si, et seulement si,  $Ax = 0$ .
- (2) Soient  $A, B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  telles que  $A - B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\text{Ker}(A) \subset \text{Ker}(B)$  et  $\text{Im}(B) \subset \text{Im}(A)$ .

Réponse.

- (1) Soit  $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ . La matrice  $A$  est symétrique réelle, elle est donc diagonalisable dans une base orthonormée  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ . On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $A$  associées à ces vecteurs propres. Comme  $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}^+$ , on a  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ . Considérons  $x \in \mathbb{R}^n$ , il existe  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  tels que :

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

La base  $\mathcal{B}$  étant orthonormée, on a :

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda_1 x_1 e_1 + \dots + \lambda_n x_n e_n \\ \langle Ax, x \rangle &= \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 \end{aligned}$$

**Supposons**  $\langle Ax, x \rangle = 0$ . Une somme de termes positifs est nulle si, et seulement si, tous ses termes sont nuls, on a donc pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\lambda_i x_i^2 = 0$  donc  $\lambda_i = 0$  ou  $x_i = 0$  et ainsi  $\lambda_i x_i = 0$ . On en déduit que  $Ax = 0$ . **Réciproquement, supposons**  $Ax = 0$ . Il est alors évident que  $\langle Ax, x \rangle = 0$ . On a ainsi démontré l'équivalence.

(2) Supposons  $A, B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  et  $A - B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ . Pour  $x \in \text{Ker } A$  :

$$\langle Bx, x \rangle = \langle (B - A)x, x \rangle + \langle Ax, x \rangle = -\langle (A - B)x, x \rangle$$

Or  $\langle Bx, x \rangle \geq 0$  et  $\langle (A - B)x, x \rangle \geq 0$  (question 1), donc  $\langle Bx, x \rangle = 0$  et donc (question 2)  $Bx = 0$  d'où  $x \in \text{Ker } B$ . On en déduit que  $\text{Ker } A \subset \text{Ker } B$ . Il faut ensuite démontrer que  $\text{Im } B = \text{Ker}(B)^\perp$  et  $\text{Im } A = \text{Ker}(A)^\perp$  (non rédigé ici, démontré en classe). On a alors :

$$\text{Im } B = \text{Ker}(B)^\perp \subset \text{Ker}(A)^\perp = \text{Im } A$$





## Indications

Ex 1. (a) Que vaut  $Mz$ ? et  $M\bar{z}$ ? À quoi est égale  $(M\bar{z})^\top$ ? (b) Pourquoi a-t-on  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \neq \emptyset$ .

Ex 2.  $\text{tr}(A)$  est la somme des valeurs propres de  $A$ ,  $\text{tr}(A^2)$  est la somme des valeurs propres de  $A^2$  et les valeurs propres de  $A^2$  se déduisent de celles de  $A$ .

Ex 3. Diagonaliser  $A$  et remplacer  $A$  dans l'équation.

Ex 4. (a) Utiliser le déterminant. Dédire  $X^{-1}$  de l'équation, justifier que  $X^{-1}$  est symétrique. (b) Diagonaliser  $X$  et remplacer dans l'équation.

Ex 5. Diagonaliser  $f$  puis proposer une application  $g$  et vérifier qu'elle convient.

Ex 6. Justifier que les sous-espaces propres de  $f$  sont supplémentaires, stables par  $g$  et les endomorphismes induits par  $g$  sont autoadjoints.

Ex 7. (a) Diagonaliser  $M$  et remplacer. (b) Considérer les coefficients  $(i, i)$  de  $M^\top M$ . (c) Poser  $M = A^2 - I_n$  et utiliser les résultats précédents.

Ex 8. Considérer une base orthonormée de vecteurs propres pour  $f$ . Démontrer que  $\langle f(x), x \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2$ . Que peut-on en déduire? Conclure.

Ex 9. Méthode usuelle pour endomorphisme autoadjoint. Prendre la matrice dans une base (bien choisie) pour obtenir les valeurs propres. Vecteurs propres : plus délicat.

Ex 10. Intégration par parties.

Ex 11. Formule pour la projection orthogonale à partir d'une base orthonormée puis lien entre la symétrie et la projection.

Ex 12. Méthodes usuelles. Plusieurs moyens pour obtenir les réponses.

Ex 13. Méthodes usuelles.

Ex 14. Méthodes usuelles pour symétrie, orthogonale et symétrie. Déterminer les sous-espaces caractéristiques de la symétrie.

Ex 15. (a) Considérer  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$  et  $X$  vecteur propre associé. Calculer  $(AX)^\top \bar{X}$  de deux manières différentes. (b) Question plus difficile. Montrer déjà que l'application est bien définie et que  $\Phi(M) \in \text{O}_n(\mathbb{R})$ .

Ex 16. (a) Méthode du cours. (b) Utiliser le (a). (c) Diagonaliser  $M$ .

Ex 17. (1) Utiliser une base orthonormée de vecteurs propres pour  $A$ . (2) Pour les noyaux : écrire une relation entre  $\langle Bx, x \rangle$ ,  $\langle Ax, x \rangle$  et  $\langle (A - B)x, x \rangle$ . Pour les images : redémontrer que  $\text{Im}(A) = \text{Ker}(A)^\perp$ .