



TD 2 : Révisions (2) – E3A PC 2024 Exercice 1

Soit n un entier naturel non nul.

On note $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $2n$.

Pour tout $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, on note $e_k = X^k$ et $\mathcal{B} = (e_0, \dots, e_{2n})$ la base canonique de E .

Pour tout couple de polynômes (P, Q) de E^2 , on pose

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$$

Soit L l'application définie sur E par :

$$\forall P \in E, L(P) = \int_{-1}^1 P(t) dt$$

Question 1. Soit $P \in E$. Démontrer que : $\langle P, P \rangle = 0 \Leftrightarrow P$ est le polynôme nul.

Question 2. Démontrer alors que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

Question 3. Montrer que L est une forme linéaire sur E .

Question 4. Déterminer $L(e_k)$ pour tout $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$.

Question 5. Déterminer la dimension de $\text{Ker}(L)$.

Question 6. Prouver qu'il existe une base $\mathcal{U}$, que l'on ne cherchera pas à expliciter, de $\text{Ker}(L)$, dont le premier vecteur est e_1 .

Question 7. Montrer que $\text{Vect}(e_0)$ et $\text{Ker}(L)$ sont deux sous-espaces orthogonaux.

Question 8. Montrer que $E = \text{Vect}(e_0) \oplus \text{Ker}(L)$.

Soit λ un réel. On considère l'application T_λ définie sur E par :

$$\forall P \in E, T_\lambda(P) = P + \lambda L(P)X$$

Question 9. Vérifier que T_λ est un endomorphisme de E .

Question 10. Soit $P \in E$. Calculer $(L \circ T_\lambda)(P)$.

Question 11. Déterminer la matrice de T_λ dans une base de E adaptée à la décomposition obtenue aux questions 6 et 8.

Question 12. Justifier que T_λ est un automorphisme de E .

Question 13. Pour tous réels α et β , préciser $T_\alpha \circ T_\beta$.

Question 14. Déterminer T_λ^{-1} .

Question 15. Déterminer les réels α tels que $\det(T_\lambda - \alpha \text{id}) = 0$.

Question 16. **Question pour les 5/2.** L'endomorphisme T_λ est-il diagonalisable?

Éléments de correction

Q 1. Remarque. Question en fait issue de l'exercice 4.

Rappel. On va utiliser le résultat suivant : si f est une fonction continue sur un segment $[a, b]$ avec $a < b$, positive sur $[a, b]$ et $\int_a^b f(t) dt = 0$, alors $\forall t \in [a, b], f(t) = 0$.

Rédaction. On suppose que $\langle P, P \rangle = 0$, autrement dit :

$$\int_{-1}^1 P(t)^2 dt = 0$$

Comme la fonction $t \mapsto P(t)^2$ est continue sur le segment $[-1, 1]$ et positive sur cet intervalle, on a :

$$\forall t \in [-1, 1], P(t) = 0$$

Le polynôme P possède par conséquent une infinité de racines (tous les éléments de l'intervalle $[-1, 1]$) donc P est le polynôme nul.

Réciproquement, si P est nul, on a clairement $\langle P, P \rangle = 0$.

On a démontré l'équivalence $\langle P, P \rangle = 0 \Leftrightarrow P = 0$.

Barème : Continue, positive, infinité de racines 3

Rapport du jury. L'argument du polynôme qui possède une infinité de racines est rarement évoqué.

Q 2. Remarque. Question en fait issue de l'exercice 4.

Rappel. Un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E est une application définie sur $E \times E$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, bilinéaire, symétrique, positive et définie-positive (ce dernier point a été établi à la question précédente).

Rédaction. Soient $P, Q, R \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien définie sur $E \times E$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ (c'est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment).
- L'application est symétrique car $\langle Q, P \rangle = \int_{-1}^1 Q(t)P(t) dt = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt = \langle P, Q \rangle$.
- Par linéarité de l'intégrale

$$\langle \lambda P + Q, R \rangle = \int_{-1}^1 (\lambda P(t) + Q(t))R(t) dt = \lambda \int_{-1}^1 P(t)R(t) dt + \int_{-1}^1 Q(t)R(t) dt = \lambda \langle P, R \rangle + \langle Q, R \rangle$$

L'application est linéaire à gauche. Étant symétrique elle est linéaire à droite donc bilinéaire.

- La fonction $t \mapsto P(t)^2$ est positive donc par positivité de l'intégrale, $\langle P, P \rangle = \int_{-1}^1 P(t)^2 dt \geq 0$.
- L'application est définie-positive d'après la question précédente.

Conclusion : $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

Barème : À valeurs dans $\mathbb{R}$, symétrique, bilinéaire, positive 4

Rapport du jury. Le caractère positif est très souvent omis par des candidats qui pensent que cela a été démontré dans la question précédente. D'autres tentent en vain de prouver que : $\langle P, P \rangle > 0 \Rightarrow P > 0$.

Q 3. Rappel. Une forme linéaire sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est une application définie sur E , linéaire et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Rédaction. L'application L est bien définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$ car c'est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. Pour $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a par linéarité de l'intégrale :

$$L(\lambda P + Q) = \int_{-1}^1 (\lambda P(t) + Q(t)) dt = \lambda \int_{-1}^1 P(t) dt + \int_{-1}^1 Q(t) dt = \lambda L(P) + L(Q)$$

On en déduit que L est linéaire. C'est donc une forme linéaire sur E .

Barème : À valeurs dans $\mathbb{R}$, linéaire 2

Rapport du jury. La justification de « forme » est quasiment toujours omise.

Q 4. Pour $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$:

$$L(e_k) = \int_{-1}^1 t^k dt = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_{-1}^1 = \frac{1 - (-1)^{k+1}}{k+1} = 0 \text{ si } k \text{ est impair}$$

$$= \frac{2}{k+1} \text{ si } k \text{ est pair}$$

Barème : Deux expressions 2 (1 seulement pour l'expression générale)

Rapport du jury. Le calcul de $L(e_k)$ n'est pas toujours abouti : les cas k pair et k impair ne sont pas traités.

Q 5. **Méthode 1 :** cours de première année sur formes linéaires et hyperplans. **Rappel :** si $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire non nulle sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie, alors $\text{Ker}(f)$ est un hyperplan de E donc $\dim \text{Ker}(f) = \dim(E) - 1$.

Rédaction. L'application L est une forme linéaire sur E , non nulle puisque $L(e_0) \neq 0$, et E est de dimension finie, $\dim E = 2n + 1$. Par conséquent, $\text{Ker}(L)$ est un hyperplan de E et ainsi $\dim \text{Ker } L = \dim(E) - 1 = 2n$.

Méthode 2 (en fait la même) : théorème du rang. **Rappel :** si $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire sur un espace vectoriel E de dimension finie, alors $\dim \text{Ker}(f) + \text{rg}(f) = \dim E$.

Rédaction. L'application L est linéaire et E est de dimension finie, $\dim E = 2n + 1$, donc d'après le théorème du rang :

$$\dim \text{Ker}(L) = \dim E - \text{rg}(L) = 2n + 1 - \text{rg}(L) = 2n + 1 - \dim \text{Im}(L)$$

Or $\text{Im}(L)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ donc $0 \leq \dim \text{Im}(L) \leq 1$. De plus, L n'est pas nulle puisque $L(e_0) \neq 0$ donc $\dim \text{Im}(L) \neq 0$ donc $\dim \text{Im}(L) = 1$ et ainsi $\dim \text{Ker}(L) = 2n$.

Méthode 3 (plus compliquée) : en explicitant $\text{Ker}(L)$.

Rédaction. On considère un polynôme $P \in E$ noté :

$$P = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k = \sum_{k=0}^{2n} a_k e_k$$

avec $a_0, \dots, a_{2n} \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$L(P) = \sum_{k=0}^{2n} a_k L(e_k) = \sum_{k=0}^{2n} a_k \frac{1 - (-1)^{k+1}}{k+1} = 2a_0 + \sum_{k=1}^{2n} a_k \frac{1 - (-1)^{k+1}}{k+1}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} P \in \text{Ker}(L) &\iff a_0 = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n} a_k \frac{1 - (-1)^{k+1}}{k+1} \\ &\iff P = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n} a_k \frac{1 - (-1)^{k+1}}{k+1} + \sum_{k=1}^{2n} a_k X^k \\ &\iff P = \sum_{k=1}^{2n} a_k \underbrace{\left(X^k - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - (-1)^{k+1}}{k+1} \right)}_{\text{noté } A_k \text{ dans la suite}} \\ &\iff P = \sum_{k=1}^{2n} a_k A_k \\ &\iff P \in \text{Vect}(A_1, \dots, A_{2n}) \end{aligned}$$

(et ceci demanderait même une justification supplémentaire)

On en déduit que $\text{Ker}(L) = \text{Vect}(A_1, \dots, A_{2n})$. La famille $(A_1, \dots, A_{2n})$ est échelonnée en degrés donc libre et ainsi $\dim \text{Ker}(L) = 2n$.

Barème : Non nulle, rang 1, théorème du rang, conclusion 4 (tous les points si autre méthode juste)

Rapport du jury. Beaucoup d'étudiants oublient qu'ils manipulent une forme linéaire ce qui les amène à effectuer des calculs longs et fastidieux qui n'aboutissent pas. On voit souvent, pour ceux qui utilisent le théorème du rang, que $\dim(\mathbb{R}_{2n}[X]) = 2n$. Le fait que la forme linéaire est non nulle est quasiment toujours oublié.

Q 6. Rappel : théorème de la base incomplète. Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille libre d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie, $\dim(E) = n$, alors il existe $e_{p+1}, \dots, e_n$ éléments de E tels que $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ soit une base de E .

Rédaction. On a noté que $L(e_1) = 0$ donc $e_1 \in \text{Ker } L$. Comme $e_1 \neq 0$, la famille (e_1) est une famille libre de $\text{Ker } L$ et d'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter cette famille en une base $\mathcal{U}$ de $\text{Ker } L$ (dont le premier vecteur est donc e_1).

Barème : $e_1 \in \text{Ker}(L)$, $e_1 \neq 0$, base incomplète 3

Rapport du jury. Le théorème de la base incomplète est rarement cité.

Q 7. Rappel. Deux sous-espaces F et G d'un espace vectoriel E (muni d'un produit scalaire) sont orthogonaux lorsque pour tout $x \in F$ et tout $y \in G$, on a $x \perp y$, autrement dit $\langle x, y \rangle = 0$.

Rédaction. Soit $P \in \text{Vect}(e_0)$, soit $Q \in \text{Ker}(L)$, on note $P = \alpha e_0 = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, on a alors :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt = \int_{-1}^1 \alpha Q(t) dt = L(\alpha Q) = \alpha L(Q) = 0$$

donc $P \perp Q$. On en déduit que $\text{Vect}(e_0) \perp \text{Ker}(L)$.

Barème : Deux vecteurs, calcul 2

Rapport du jury. Pour montrer que $\text{Vect}(e_0)$ et $\text{Ker}(L)$ sont orthogonaux, certains étudiants tentent d'effectuer le produit scalaire $\langle \text{Vect}(e_0), \text{Ker}(L) \rangle$ qui n'a pas de sens.

Q 8. Méthode 1. Rappel : deux sous-espaces F et G d'un espace vectoriel E de dimension finie sont supplémentaires si, et seulement si, $F \cap G = \{0\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.

Soit $P \in \text{Vect}(e_0) \cap \text{Ker}(L)$. On note $P = \alpha P_0 = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

$$L(P) = \int_{-1}^1 \alpha dt = 2\alpha$$

et $L(P) = 0$ donc $\alpha = 0$ donc $P = 0$. On en déduit que $\text{Vect}(e_0) \cap \text{Ker}(L) = \{0\}$. Comme $e_0 \neq 0$, on a $\dim \text{Vect}(e_0) = 1$ et on a vu que $\dim \text{Ker}(L) = 2n$ donc :

$$\dim \text{Vect}(e_0) + \dim \text{Ker}(L) = 1 + 2n = \dim E$$

On en déduit que $\text{Vect}(e_0) \oplus \text{Ker}(L) = E$.

Méthode 2. Rappel : deux sous-espaces F et G d'un espace vectoriel E de dimension finie sont supplémentaires si, et seulement si, en réunissant une base de F et une base de G on obtient une base de E .

Rédaction. La famille (e_0) est une base de $\text{Vect}(e_0)$. On considère $\mathcal{U} = (e_1, u_2, \dots, u_{2n})$ une base de $\text{Ker}(L)$ (question 6). On pose $\mathcal{B}' = (e_0, e_1, u_2, \dots, u_{2n})$ famille de E . On considère une combinaison linéaire nulle :

$$\alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_{2n} u_{2n} = 0$$

avec $\alpha_0, \dots, \alpha_{2n} \in \mathbb{R}$. On applique L , avec la linéarité :

$$\alpha_0 L(e_0) + \alpha_1 L(e_1) + \alpha_2 L(u_2) + \dots + \alpha_{2n} L(u_{2n}) = L(0) = 0$$

autrement dit :

$$\alpha_0 L(e_0) = 0$$

Comme $L(e_0) \neq 0$, on a $\alpha_0 = 0$. On a donc :

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_{2n} u_{2n} = 0$$

La famille $(e_1, u_2, \dots, u_{2n})$ est libre, on a donc $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{2n} = 0$. On en déduit que $\mathcal{B}'$ est libre. Or $\text{card } \mathcal{B}' = 2n + 1 = \dim E$ donc $\mathcal{B}'$ est une base de E et ceci montre que $\mathcal{B}'$ est une base de E . On en déduit que $\text{Vect}(e_0)$ et $\text{Ker}(L)$ sont des sous-espaces supplémentaires de E . **Méthode 3. Rappel :** deux sous-espace F et G de E sont supplémentaires si, et seulement si, $F \cap G = \{0\}$ et tout élément de E peut s'écrire comme une somme d'un élément de F et d'un élément de G .

Rédaction. On a déjà montré plus haut que $\text{Vect}(e_0) \cap \text{Ker}(L) = \{0\}$. Soit $P \in E$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$L(P - \lambda e_0) = L(P) - \lambda L(e_0) = L(P) - 2\lambda$$

Posons $\lambda = L(P)/2$, on a alors $L(P - \lambda e_0) = 0$ donc :

$$P = \lambda e_0 + P - \lambda e_0$$

avec $\lambda e_0 \in \text{Vect}(e_0)$ et $P - \lambda e_0 \in \text{Ker}(L)$. Par conséquent, $\text{Vect}(e_0) \oplus \text{Ker}(L) = E$.

Barème : Intersection, $e_0 \neq 0$, $\dim \text{Vect}(e_0) + \dim \text{Ker } L = \dim E$ 3 (tous les points si autre méthode juste)

Rapport du jury. Il y a souvent une confusion entre « complémentaire » et « supplémentaire », ce qui amène un candidat à penser qu'il y a une erreur dans l'énoncé puisque le vecteur e_2 n'appartient à aucun des deux sous-espaces. Enfin, un nombre non négligeable de candidats tente d'établir que $\text{Vect}(e_0) \cap \text{Ker}(L) = \emptyset$.

Q 9. Rappel. Un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est une application f définie sur E , à valeurs dans E et linéaire.

Rédaction. L'application T_λ est bien définie sur E . De plus, $X \in E$ (car $\neq 1$) donc pour $P \in E$, on a $T_\lambda(P) = P + \lambda L(P)X \in E$ comme combinaison linéaire d'éléments de E . Par ailleurs pour $P, Q \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a par linéarité de L :

$$T_\lambda(\alpha P + Q) = \alpha P + Q + \lambda L(\alpha P + Q)X = \alpha P + Q + \lambda \alpha L(P)X + \lambda L(Q)X = \alpha T_\lambda(P) + T_\lambda(Q)$$

donc T_λ est linéaire. C'est un endomorphisme de E .

Barème : Linéaire, de E dans E 2

Rapport du jury. La partie « de E dans E » est souvent escamotée ou simplement énoncée sans justification. Il semble y avoir dans l'esprit de certains une confusion entre dimension et degré : $\deg(T_\lambda(P)) \leq 2n + 1 = \dim E$.

Q 10. Pour $P \in E$:

$$(L \circ T_\lambda)(P) = L(T_\lambda(P)) = L(P + \lambda L(P)X) = L(P) + \lambda L(P)L(X) = L(P)$$

Ceci se note également $L \circ T_\lambda = L$.

Barème : $L \circ T_\lambda = L$ 1

Il reste souvent un terme $L^2(P)$ dont l'étudiant ne sait que faire.

Q 11. On note $\mathcal{B}' = (e_0, e_1, e'_2, \dots, e'_{2n})$ une telle base. On a :

$$\begin{aligned} T_\lambda(e_0) &= 1 + \lambda L(e_0)X = 1 + 2\lambda X = e_0 + 2\lambda e_1 \\ T_\lambda(e_1) &= e_1 + \lambda L(e_1)X = e_1 \\ \forall k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, T_\lambda(e'_k) &= e'_k + \lambda L(e'_k)X = e'_k \end{aligned}$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(T_\lambda) = \begin{pmatrix} T_\lambda(e_0) & T_\lambda(e_1) & T_\lambda(e'_2) & \cdots & T_\lambda(e'_{2n}) \\ = e_0 + 2\lambda e_1 & = e_1 & = e'_2 & \cdots & = e'_{2n} \\ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2\lambda & 1 & & & (0) \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & (0) & & 1 \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} e_0 \\ e_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_{2n} \end{matrix} \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$$

Matrice notée M dans la suite.

Notation sous forme de matrice par blocs :

$$M = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & (0) \\ 2\lambda & 1 & \\ \hline (0) & & I_{2n-1} \end{array} \right)$$

Barème : Dimension $2n+1$, première colonne, autres colonnes 3

Rapport du jury. La matrice, lorsqu'elle est proposée sans calculs justificatifs est souvent incorrecte : rappelons que tout résultat énoncé dans la copie se doit d'être justifié. On trouve aussi parfois des vecteurs e_j dans la matrice.

Q 12. **Rappel.** Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est un automorphisme si, et seulement si, son déterminant est non nul. De plus, son déterminant est celui de sa matrice dans une base quelconque de E .

Rédaction. La matrice M est triangulaire donc $\det(T_\lambda) = \det(M) = 1$ donc $\det(T_\lambda) \neq 0$ donc T_λ est un automorphisme de E .

Barème : Déterminant (avec une justification), conclusion 3

Q 13. Pour $P \in E$:

$$\begin{aligned} T_\alpha \circ T_\beta(P) &= T_\alpha(T_\beta(P)) \\ &= T_\beta(P) + \alpha L(T_\beta(P))X \\ &= T_\beta(P) + \alpha L(P)X \\ &= P + \beta L(P)X + \alpha L(P)X \\ &= T_{\alpha+\beta}(P) \end{aligned}$$

Ceci se note également $T_\alpha \circ T_\beta = T_{\alpha+\beta}$.

Barème : Justification, résultat 2

Q 14. Appliquons la question précédente avec $\alpha = \lambda$ et $\beta = -\lambda$, on obtient :

$$T_\lambda \circ T_{-\lambda} = T_{\lambda-\lambda} = T_0 = \text{id}_E$$

On sait que T_λ est inversible, on compose à gauche par T_λ^{-1} on obtient :

$$T_\lambda^{-1} \circ T_\lambda \circ T_{-\lambda} = T_\lambda^{-1} \circ \text{id}_E$$

ce qui se simplifie en :

$$T_{-\lambda} = T_\lambda^{-1}$$

Remarque. On peut aussi partir de la matrice de T_λ et déterminer son inverse à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss.

Q 15. On se ramène à une matrice triangulaire :

$$\det(T_\lambda - \alpha \text{id}) = \det(M - \alpha I_{2n+1}) = (1 - \alpha)^{2n+1}$$

donc $\det(T_\lambda - \alpha \text{id}) = 0$ si, et seulement si, $\alpha = 1$.

Q 16. Question précédente : $\text{Sp}(T_\lambda) = \{1\}$. Question 5 :

$$\dim E_1(T_\lambda) = \dim \text{Ker } L = 2n < \dim E$$

donc T_λ n'est pas diagonalisable.