TD 23 : Calcul différentiel

Classe C^1

Exercice 1. Étudier si les fonctions f et g suivantes sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Réponse. Les fonctions f et g sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme quotients de fonctions de classe C^1 dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Étude de f. On a facilement pour $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^5}{(x^2+y^4)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2(x^2-3y^4)}{(x^2+y^4)^2}$$

Puis ensuite :

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$
$$\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

donc f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

On note ensuite que :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \frac{x^4}{x^4} = 1 \not\xrightarrow[x\to 0]{} \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

Ainsi, $\partial f/\partial y$ n'est pas continue en $(0,0)$ donc f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
Étude de g. Pour $(x,y) \neq (0,0)$ on obtient après simplifications :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{x(2x^3+3xy^2+y^3)}{\sqrt{x^2+y^2}^3}$$

et par symétrie sur l'expression de $g(x,y)$:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -\frac{y(2y^3+3yx^2+x^3)}{\sqrt{x^2+y^2}^3}$$

Ensuite :

$$\frac{g(x,0)-g(0,0)}{x} = \frac{x^3}{x\sqrt{x^2}} = \frac{x^2}{|x|} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$
$$\frac{g(0,y)-g(0,0)}{y} = \frac{-y^3}{y\sqrt{y^2}} = -\frac{y^2}{|y|} \xrightarrow[y\to 0]{} 0$$

Par conséquent, g admet des dérivées partielles en $(0,0)$ et :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0$$

Considérons la fonction $\partial g / \partial x$:

$$\frac{\partial g}{\partial x} : \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) \neq (0,0) & \mapsto & \dfrac{x(2x^3 + 3xy^2 + y^3)}{\sqrt{x^2+y^2}^3} \\ (0,0) & \mapsto & 0 \end{array}$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et il reste à étudier sa continuité en $(0,0)$. On considère $(x,y) \neq (0,0)$ et on utilise les coordonnées polaires (r,θ) telle que $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ et $r = \sqrt{x^2+y^2} > 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial x}(0,0)\right| &= \frac{|r\cos\theta(2r^3\cos^3\theta + 3r^3\cos\theta\sin^2\theta + r^3\sin^3\theta)|}{r^3} \\ &= r\left|\cos\theta(2\cos^3\theta + 3\cos\theta\sin^2\theta + \sin^3\theta)\right| \\ &\leqslant r|\cos\theta|\left(2\left|\cos^3\theta\right| + 3\left|\cos\theta\sin^2\theta\right| + \left|\sin^3\theta\right|\right) \\ &\leqslant 6r \end{aligned}$$

Or $r \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$ donc par encadrement :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} \frac{\partial g}{\partial x}(0,0)$$

donc $\partial g/\partial x$ est continue en $(0,0)$, elle est donc continue sur $\mathbb{R}^2$. Par symétrie sur les expressions des dérivées partielles, on obtiendrait de même que $\partial g/\partial y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et ainsi g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ en posant :

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \text{si } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(x,y) = 0 \text{ sinon}$$

Démontrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Démontrer que f admet des dérivées partielles par rapport à x et y en $(0,0)$. Démontrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.
Réponse. La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions de classe C^1 dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Puis :

$$\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$
$$\frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0 \xrightarrow[y\to 0]{} 0$$

Ainsi, f admet des dérivées partielles par rapport à x et y en $(0,0)$ et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

L'énoncé demande ensuite d'étudier la continuité de f en $(0,0)$, on remarque que :

$$f(x,x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \underset{x\to 0}{\not\longrightarrow} 0$$

donc f n'est pas continue en $(0,0)$. **Remarque :** ceci montre que l'existence des dérivées partielles en tout point n'assure pas la continuité en tout point (contrairement au cas des fonctions d'une seule variable où il est bien connu que la dérivabilité en un point entraine la continuité en ce point). Notons que f ne peut donc pas être de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ (car d'après le cours si f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ alors elle est continue sur $\mathbb{R}^2$).

Exercice 3. Déterminer si la fonction f suivante est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \begin{matrix} x^3 \sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = 0 \end{matrix}$$

Recherche d'extrémums

Exercice 4 *(Écrit CCP, PC, 2020)*. On considère $f : (x,y) \mapsto x^2+y^2+4xy$ et $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$.

(a) Justifier que l'application f admet un maximum et un minimum sur D.

(b) En étudiant la fonction $t \mapsto f(\cos t, \sin t)$, déterminer les extrémums de l'application f sur la frontière de D.

(c) Justifier que f est de classe C^1 et déterminer les points critiques de f dans l'intérieur de D.

(d) En déduire que la maximum de f sur D est 3 et que le minimum de f sur D est -1.

Exercice 5. Déterminer les extrémums locaux de :

(1) $f : (x,y) \mapsto x^3+y^3-9xy+1$ sur $\mathbb{R}^2$.

(2) $f : (x,y) \mapsto x^2+x^2y+y^3$ sur $\mathbb{R}^2$.

(3) $f : (x,y) \mapsto x^4+y^4+(x-y)^2$ sur $]0,+\infty[^2$.

Réponse. Dans chaque cas, on travaille sur un ouvert et la fonction f est de classe C^2 sur cet ouvert. Correction succincte :

(1) On trouve deux points critiques $(0,0)$ et $(3,3)$. En $(0,0)$ la matrice hessienne a un déterminant strictement négatifs donc elle possède deux valeurs propres de signes contraires stricts donc il n'y a pas d'extrémum local en $(0,0)$. En $(3,3)$, la matrice hessienne a un déterminant strictement positif donc elle possède deux valeurs propres de mêmes signes strict donc il y a un extrémum local en $(3,3)$.

(2) On trouve un seul point critique $(0,0)$. La matrice hessienne en ce point critique a un déterminant nul. L'un des valeurs propres est nulle et on ne peut donc pas conclure ainsi. On note que $f(0,0)=0$ et $f(0,y)=y^3$ qui n'est pas de signe constant au voisinage de 0 donc f n'a pas d'extrémum local en $(0,0)$.

(3) Le seul point critique est $(0,0)$ qui n'est pas dans l'ensemble considéré donc il n'y a pas d'extrémum local sur $]0,+\infty[^2$.

Équations aux dérivées partielles

Exercice 6. Déterminer les fonctions f de classe C^1 sur $U = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$(E_1) \quad x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = x$$

Faire de même avec l'équation aux dérivées partielles $(E_2)\quad x\dfrac{\partial f}{\partial y} - y\dfrac{\partial f}{\partial x} = f$.

Réponse. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On note $V = \mathbb{R}^{+*} \times]0,\pi[$ et on définit :

$$x : (r,\theta) \in V \mapsto r\cos\theta$$
$$y : (r,\theta) \in V \mapsto r\sin\theta$$
$$\widetilde{f} : (r,\theta) \in V \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

On pourra alors écrire :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta &= \arccos\frac{x}{r} = \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$

Les fonctions x et y sont de classe C^1 sur V, $\widetilde{f}$ est de classe C^1 sur V. On trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial r} &= \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \theta} &= -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y} = -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

Alors :

$$f \text{ est solution de } (E_1) \text{ sur } U \iff \widetilde{f} \text{ est solution de } \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \theta} = r\cos\theta \text{ sur } V$$

Les solutions $\widetilde{f}$ sont les fonctions :

$$\widetilde{f} : (r,\theta) \in V \mapsto r\sin\theta + C(r)$$

avec C de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$. Les solutions f de (E_1) sont les fonctions :

$$f : (x,y) \in U \mapsto \sqrt{x^2+y^2}\sin\left(\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + C(\sqrt{x^2+y^2})$$

Sur le même principe :

$$f \text{ est solution de } (E_2) \text{ sur } U \iff \widetilde{f} \text{ est solution de } \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \theta} = \widetilde{f} \text{ sur } V$$

On obtient une équation différentielle d'ordre 1 sur $\widetilde{f}$ par rapport à la variable θ. Les solutions $\widetilde{f}$ sont les fonctions :

$$\widetilde{f} : (r,\theta) \in V \mapsto C(r)\mathrm{e}^{\theta}$$

avec C une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$. Les solutions de (E_2) sont les fonctions :

$$f : (x,y) \in U \mapsto C\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\exp\left(\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Exercice 7. On considère l'ensemble $U =]0,+\infty[\times \mathbb{R}$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1, on définit $\widetilde{f}(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$ avec $x(u,v) = u$ et $y(u,v) = uv$.

(a) Démontrer que $\widetilde{f}$ est définie sur U, de classe C^1 sur U et exprimer $\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial u}$ en fonction de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

(b) Déterminer les fonctions f de classe C^1 sur U qui sont solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$(E) \qquad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 1$$

Réponse. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classse C^1. On considère les applications :

$$\begin{aligned} x &: (u,v) \in U \mapsto u \\ y &: (u,v) \in U \mapsto uv \\ \widetilde{f} &: (u,v) \in U \mapsto f(u,uv) \end{aligned}$$

On note que pour $(u,v) \in U$, on a $(u,uv) \in U$. On aura de plus :

$$\begin{aligned} u &= x \\ v &= \frac{y}{x} \end{aligned}$$

Les applications x, y et $\widetilde{f}$ sont de classe C^1 sur U. On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} \\ u\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial u} &= u\frac{\partial f}{\partial x} + uv\frac{\partial f}{\partial y} = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

On a ainsi :

$$f \text{ solution de } (e) \text{ sur } U \iff \widetilde{f} \text{ solution sur } U \text{ de } u\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial u} = 1$$

Les solutions $\widetilde{f}$ sont les fonctions :

$$\widetilde{f} : (u,v) \in U \mapsto \ln(u) + C(v)$$

avec C une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Les solutions de (E) sur U sont les fonctions :

$$f : (x,y) \in U \mapsto \ln(x) + C\left(\frac{y}{x}\right)$$

Indications

Ex 1. Méthodes vues en classe.

Ex 2. Classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et existence des dérivées partielles : méthodes vues en classe. Pour f non continue en $(0,0)$: considérer $f(x,x)$ lorsque $x \to 0$.

Ex 3. Coordonnées polaires pour l'étude en $(0,0)$.

Ex 4. (a) Théorème du cours de topologie. (b) La fonction $t \mapsto f(\cos t, \sin t)$ est une fonction d'une seule variable dont on peut faire l'étude. (c) (d) Méthodes vues en classe.

Ex 5. (1) Méthode du cours. (2) Méthode du cours puis montrer que f ne peut pas être de signe constant sur $\mathbb{R}^2$. (3) Méthode du cours.

Ex 6. Utiliser le changement de variable en coordonnées polaires.

Ex 7. (a) Formule de dérivation d'une composée. (b) Noter que $\widetilde{f}$ sera solution d'une équation aux dérivées partielles plus simple.