TD 4 : Révisions (3) – Applications linéaires

Dans chacun des exercices suivants, on montrera que l'application f est linéaire (si cela n'est pas donné dans l'énoncé) et on déterminera son noyau.

Exercice 1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-y+z \\ x+3y+z \end{pmatrix} \end{array}$.

Exercice 2. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & x-y-z \end{array}$

Exercice 3. $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. $f = g^k = \underbrace{g \circ g \circ \cdots \circ g}_{k \text{ termes}}$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+y \end{pmatrix} \end{array}$.

Exercice 5. $f = g - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et g application canoniquement associée à $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P(X-\alpha)-P(X-\beta) \end{array}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\alpha \neq \beta$.

Réponse. **Linéarité.** Pour $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, avec les propriétés de calcul sur les polynômes :

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)(X-\alpha) - (\lambda P + Q)(X-\beta) \\ &= \lambda P(X-\alpha) + Q(X-\alpha) - \lambda P(X+\beta) - Q(X-\beta) \\ &= \lambda f(P) + f(Q) \end{aligned}$$

Ainsi, l'application f est linéaire.

Justifier que f est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ noté $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$. Par linéarité de f :

$$\begin{aligned} f(P) &= af(X^3) + bf(X^2) + cf(X) + df(1) \\ &= a((X-\alpha)^3 - (X-\beta)^3) + b((X-\alpha)^2 - (X-\beta)^2) + c((X-\alpha) - (X-\beta)) \\ &= a(3X^2(\beta-\alpha) + 3X(\alpha^2-\beta^2) + \beta^3 - \alpha^3) + b(2(\beta-\alpha)X + \alpha^2 - \beta^2) + c(\beta - \alpha) \end{aligned}$$

Ceci montre que $f(P) \in \mathrm{Vect}(1, X, X^2) = \mathbb{R}_2[X]$. L'application f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Noyau de f. Comme $f(1) = 0$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)) \\ &= \mathrm{Vect}(f(X), f(X^2), f(X^3)) \end{aligned}$$

avec, d'après les calculs précédents :

$$\begin{aligned} f(X^3) &= 3X^2(\beta-\alpha) + 3X(\alpha^2-\beta^2) + \beta^3 - \alpha^3 \\ f(X^2) &= 2(\beta-\alpha)X + \alpha^2 - \beta^2 \\ f(X) &= \beta - \alpha \end{aligned}$$

Comme $\beta-\alpha \neq 0$, la famille $(f(X), f(X^2), f(X^3))$ est échelonnée en degrés, elle est donc libre. Comme elle est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$, c'est une base de $\mathrm{Im}(f)$ et on a alors $\mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Im}(f) = 3$. Avec le théorème du rang :

$$\dim \mathrm{Ker}(f) = \dim \mathbb{R}_3[X] - \mathrm{rg}(f) = 4 - 3 = 1$$

Par ailleurs, on a noté que $f(1) = 0$ donc $1 \in \mathrm{Ker}(f)$. Comme $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel, on a $\mathrm{Vect}(1) \subset \mathrm{Ker}(f)$. On a $\dim \mathrm{Vect}(1) = 1$ et $\dim \mathrm{Ker}(f) = 1$ donc par égalité des dimensions, $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(1)$.

Exercice 7. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & XP' - P \end{array}$ avec $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

Exercice 8. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & XP' - nP \end{array}$ avec $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

Exercice 9. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$

Exercice 10. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(a) \end{array}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 11. $f : \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AMA \end{array}$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 12. $f : \begin{array}{rcl} \mathscr{L}(E) & \to & \mathscr{L}(E) \\ g & \mapsto & s \circ g \circ s \end{array}$ avec s une symétrie de E.

Exercice 13. $f : \begin{array}{rcl} \mathrm{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathrm{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ u & \mapsto & u' \end{array}$

Exercice 14. $f : \begin{array}{rcl} \mathrm{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathrm{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ u & \mapsto & v \end{array}$ où v est la fonction $v : x \mapsto u'(x) + 2u(x)$.

Exercice 15. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ u = (u_n)_{n\geqslant 0} & \mapsto & v = (v_n)_{n\geqslant 0} \end{array}$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} + u_n$.