

Variables aléatoires discrètes (compléments)

◇ On peut considérer que l'un des buts de ce chapitre est de répondre à la question : « à quoi est égale la variance d'une somme ? » On peut regarder ce que donne le calcul :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(X + Y) &= \mathbf{E}((X + Y)^2) - (\mathbf{E}(X + Y))^2 \quad \text{par définition} \\ &= \mathbf{E}(X^2 + 2XY + Y^2) - (\mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y))^2 \\ &= \mathbf{E}(X^2) + 2\mathbf{E}(XY) + \mathbf{E}(Y^2) - \mathbf{E}(X)^2 - 2\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) - \mathbf{E}(Y)^2 \\ &= \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 + \mathbf{E}(Y^2) - \mathbf{E}(Y)^2 + 2(\mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)) \\ &= \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2(\mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)) \end{aligned}$$

On aura donc $\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$ à condition que $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$. En général cette condition n'est pas satisfaite car l'espérance d'un produit n'est pas égal au produit des espérances.

◇ En particulier, il pourra être intéressant de savoir calculer $\mathbf{E}(XY)$. Supposons pour simplifier que X et Y prennent des valeurs entières, on a alors :

$$\mathbf{E}(XY) = \sum_{k,n} kn \mathbf{P}(X = k \text{ et } Y = n)$$

Si on fait l'hypothèse que X et Y sont indépendantes, alors :

$$\mathbf{E}(XY) = \sum_{k,n} kn \mathbf{P}(X = k) \mathbf{P}(Y = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \mathbf{P}(X = k) \times \sum_{n=0}^{+\infty} n \mathbf{P}(Y = n) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$$

Dans ce cas particulier, on a $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$ et donc $\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$ lorsque X et Y sont indépendantes.

◇ Toujours à propos de variables aléatoires indépendantes X et Y , on aura souvent besoin de déterminer la loi de $X + Y$. Supposons pour simplifier que X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ donc $Z = X + Y$ est également à valeurs dans $\mathbb{N}$. Considérons $n \in \mathbb{N}$, pour déterminer $\mathbf{P}(Z = n)$, on applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $[X = k]$,

$k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z = n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) \mathbf{P}_{X=k}(Z = n) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X = k, Z = n) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X = k, X + Y = n) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k, Y = n - k) \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X = k) \mathbf{P}(Y = n - k) \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \end{aligned}$$

Connaissant les lois de X et Y , on pourra alors obtenir la loi de Z .

♦ Disposer de l'égalité $\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$ pour deux variables indépendantes permet également d'aborder une autre propriété. Supposons que l'on dispose d'une variable aléatoire X , à valeurs dans $\mathbb{N}$ pour simplifier, et admettant une espérance qui a été définie par la relation :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n \mathbf{P}(X = n)$$

En pratique, pour déterminer l'espérance d'une variable aléatoire, on répète un grand nombre de fois l'expérience et on fait la moyenne des résultats obtenus. La première réalisation de l'expérience donne une valeur X_1 , la deuxième donne une valeur X_2 , etc. On considère alors la moyenne :

$$Y = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

D'une certaine manière, on imagine que Y va tendre vers $\mathbf{E}(X)$. Pour le justifier plus rigoureusement, on note déjà que les résultats $X_1, X_2, \dots$ sont eux mêmes des variables aléatoires que l'on peut supposer indépendantes (les répétitions de l'expérience doivent être indépendantes) et suivant la même loi que X . On aura alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y) &= \frac{\mathbf{E}(X_1) + \dots + \mathbf{E}(X_n)}{n} = \mathbf{E}(X) \\ \mathbf{V}(Y) &= \frac{1}{n^2} \mathbf{V}(X_1 + \dots + X_n) = \frac{1}{n^2} (\mathbf{V}(X_1) + \dots + \mathbf{V}(X_n)) = \frac{\mathbf{V}(X)}{n} \end{aligned}$$

Appliquons maintenant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à Y :

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbf{P}(|Y - \mathbf{E}(Y)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{V}(Y)}{\varepsilon^2}$$

On a donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbf{P}(|Y - \mathbf{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{V}(X)}{n\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

D'une certaine manière, ceci signifie bien que Y va tendre vers $\mathbf{E}(X)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Le résultat démontré ici est appelé *loi faible des grands nombres*.

♦ Les notions de couples de variables aléatoires et de variables aléatoires indépendantes ont déjà été vus en première année dans le cas des variables aléatoires finies, il est donc judicieux de commencer par revoir ce cours.

♦ Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ est un espace probabilisé.

I. Couples de vad

Notation : Si X et Y sont deux vad, l'évènement $[X = x] \cap [Y = y]$ s'écrit également « $X = x$ et $Y = y$ » ou encore souvent $X = x, Y = y$. $\square$

Définition 1 – Couple de vad

Si X et Y sont deux vad, on peut définir une application notée (X, Y) par :

$$\begin{aligned} (X, Y) : \Omega &\rightarrow X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ \omega &\mapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{aligned}$$

L'image de Ω par cette application est incluse dans $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ qui est fini ou dénombrable (produit de deux ensembles finis ou dénombrables). Ainsi (X, Y) est également une vad. On dit que (X, Y) est un couple de variables aléatoires.

- Donner la loi du couple (on dit aussi la loi conjointe de X et Y) c'est déterminer l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X , l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y et, pour tout $x \in X(\Omega)$ et tout $y \in Y(\Omega)$, déterminer la probabilité $\mathbf{P}(X = x, Y = y)$.
- Donner les lois marginales du couples (X, Y) , c'est simplement donner la loi de X et la loi de Y .
- Si $y \in Y(\Omega)$, donner la loi conditionnelle de X sachant l'évènement $[Y = y]$ c'est déterminer, pour tout $x \in X(\Omega)$, la probabilité $\mathbf{P}(X = x | Y = y)$.
- De manière analogue, on peut déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X = x]$.

Remarques.

- Connaître la loi du couple (X, Y) apporte plus d'information que connaître séparément les lois de X et Y .
- Lorsque la loi du couple (X, Y) est connue, on peut retrouver les lois de X et Y avec la formule des probabilités totales. $\square$

II. Indépendance de vad

Définition 2 – Indépendance de deux vad

Deux vad X et Y sont dites indépendantes (relativement à la probabilité $\mathbf{P}$) lorsque :

$$\forall A \subset X(\Omega), \forall B \subset Y(\Omega), \mathbf{P}(X \in A \text{ et } Y \in B) = \mathbf{P}(X \in A)\mathbf{P}(Y \in B)$$

On note alors $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Proposition 3 – Caractérisation des vad indépendantes

Si X et Y sont deux vad, alors :

$$X \perp\!\!\!\perp Y \iff \forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega), \mathbf{P}(X = x \text{ et } Y = y) = \mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y)$$

Proposition 4 – Fonctions associées à des vav indépendantes

Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ et si f est une fonction définie au moins sur $X(\Omega)$ et g est une fonction définie au moins sur $Y(\Omega)$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$.

Remarques.

- La définition signifie que si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors tout événement ne concernant que X est indépendant de tout événement ne concernant que Y . Par exemple, si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbf{P}(X \geq 0 \text{ et } Y < 1) = \mathbf{P}(X \geq 0)\mathbf{P}(Y < 1)$.
- Le (1) signifie que si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors la loi du couple (X, Y) pourra s'obtenir simplement à partir des lois de X et Y (la réciproque est toujours vraie).
- Le (2) signifie que si X et Y sont indépendantes alors toute expression ne dépendant que de X est indépendante de toute expression ne contenant que Y . Par exemple, si X et Y sont indépendantes, alors X^2 et $Y + 1$ sont indépendantes. $\square$

Proposition 5 – Série génératrice d'une somme de deux vav indépendantes

Si X et Y sont deux vav indépendantes avec $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$, alors $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$.

Proposition 6 – Somme de vav suivant une loi de Poisson

Si X et Y sont deux vav indépendantes, $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ avec $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

III. Espérance d'un produit et covariance

♦ On ne considère dans cette partie que des variables aléatoires discrètes X à valeurs dans $\mathbb{R}$ (c'est à dire telles que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$).

Proposition 7

Si X et Y sont deux vav et X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, alors X , Y et XY sont d'espérance finie.

Remarque. Le fait que X^2 et Y^2 aient une espérance finie assure que X , Y et XY ont une espérance. Cette condition sera donc utilisée très souvent dans la suite. Le programme propose une autre formulation : on dit que X admet un moment d'ordre 2 lorsque X^2 admet une espérance finie. $\square$

Proposition 8 – Espérance d'un produit

Si X et Y sont deux vav qui admettent un moment d'ordre 2, alors :

$$\mathbf{E}(XY) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} xy \mathbf{P}(X = x, Y = y)$$

III. Espérance d'un produit et covariance

Proposition 9 – Espérance d'un produit de v.a.d indépendantes

Si X et Y sont deux v.a.d indépendantes et qui admettent un moment d'ordre 2, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Remarque. La quantité $E(XY) - E(X)E(Y)$ permet donc dans une certaine mesure de tester l'indépendance de deux v.a.d au sens suivant : si les v.a.d X et Y sont indépendantes, alors la quantité $E(XY) - E(X)E(Y)$ est nulle. On appelle cette quantité *covariance* de X et Y . $\square$

Définition 10 – Covariance de deux v.a.d

Soient X et Y deux v.a.d qui admettent un moment d'ordre 2. On appelle covariance de X et Y et on note $\mathbf{Cov}(X, Y)$ le réel :

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

Proposition 11 – Covariance de deux v.a.d indépendantes

Si X et Y sont deux v.a.d indépendantes admettant un moment d'ordre 2, alors $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$ (réciproque fausse).

Remarque. La définition de covariance ressemble à celle de la variance. D'ailleurs, si $X = Y$ la covariance de X et Y est en fait la variance de X . Mais on démontre aussi que la covariance de X et Y intervient lorsque l'on cherche à exprimer la variance de $X + Y$ en fonction de la variance de X et de celle de Y . $\square$

Proposition 12 – Liens entre covariance et variance

Si X et Y sont deux v.a.d qui admettent un moment d'ordre 2, alors :

- (1) $\mathbf{Cov}(X, X) = \mathbf{V}(X)$;
- (2) $\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\mathbf{Cov}(X, Y)$;
- (3) Si de plus X et Y sont indépendantes, alors $\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$ (réciproque fausse).

Proposition 13 – Propriétés algébriques de la covariance

Si X, Y et Z sont des v.a.d qui admettent un moment d'ordre 2 et $a \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned}\mathbf{Cov}(Y, X) &= \mathbf{Cov}(X, Y) \\ \mathbf{Cov}(X + Y, Z) &= \mathbf{Cov}(X, Z) + \mathbf{Cov}(Y, Z) \\ \mathbf{Cov}(X, Y + Z) &= \mathbf{Cov}(X, Y) + \mathbf{Cov}(X, Z) \\ \mathbf{Cov}(aX, Z) &= a\mathbf{Cov}(X, Z) = \mathbf{Cov}(X, aZ)\end{aligned}$$

Remarque. Pour calculer la covariance de deux variables aléatoires, on utilise parfois la définition mais il est souvent très efficace d'utiliser les propriétés que l'on vient de voir sur la covariance. $\square$

Remarques.

- Les propriétés précédentes peuvent s'exprimer en disant que **Cov** est symétrique et bilinéaire. On a de plus noté que $\mathbf{Cov}(X, X) = \mathbf{V}(X)$ et on sait que $\mathbf{V}(X) \geq 0$, donc on a également une propriété de positivité. La fonction **Cov** possède donc des propriétés semblables à celles d'un produit scalaire.
- L'analogie a ses limites car si on suppose $\mathbf{Cov}(X, X) = 0$ on a $\mathbf{V}(X) = 0$ et on a vu que ceci signifie qu'il existe un réel c tel que $\mathbf{P}(X \neq c) = 0$, on dit alors que X est constante presque sûrement. Donc $\mathbf{Cov}(X, X) = 0$ n'implique pas X nulle mais seulement X constante presque sûrement.
- En revanche, $\mathbf{E}(XY)$ a bien des propriétés semblables à celles d'un produit scalaire : symétrique, bilinéaire, positive et si $\mathbf{E}(X^2) = 0$ alors $\mathbf{P}(X = 0) = 1$ (on ne peut pas affirmer de manière générale que X est nulle).
- On a donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\mathbf{E}(XY) \leq \sqrt{\mathbf{E}(X^2)} \sqrt{\mathbf{E}(Y^2)}$$

- En appliquant ceci avec les variables aléatoires $X - \mathbf{E}(X)$ et $Y - \mathbf{E}(Y)$ on obtient :

$$|\mathbf{Cov}(X, Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$$

- Une propriété du type $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$ est l'analogue de l'orthogonalité pour un produit scalaire. Lorsque $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$, on dit que les vad X et Y sont décorrélées. On a démontré que deux vad indépendantes sont décorrélées mais la réciproque est fausse. $\square$

IV. Variables aléatoires (mutuellement) indépendantes

Remarque. Pour simplifier, on ne considère dans cette partie que des variables aléatoires discrètes X à valeurs dans $\mathbb{R}$ (c'est à dire telles que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$, c'est de toutes façons le cas usuel). $\square$

Définition 14 – Suite finie de vad (mutuellement) indépendantes

Soient $X_1, \dots, X_n$ des vad. On dit qu'elles sont (mutuellement) indépendantes lorsque :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \mathbf{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mathbf{P}(X_1 = x_1) \times \dots \times \mathbf{P}(X_n = x_n)$$

On dit que $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes deux à deux lorsque pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ avec $i \neq j$, on a $X_i \perp\!\!\!\perp X_j$.

Définition 15 – Suite (infinie) de vad indépendantes

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de vad. On dit que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de vad indépendantes lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les vad $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, autrement dit lorsque :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \mathbf{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mathbf{P}(X_1 = x_1) \times \dots \times \mathbf{P}(X_n = x_n)$$

On dit que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de vad deux à deux indépendantes lorsque pour tout $i, j \in \mathbb{N}^*$ avec $i \neq j$, on a $X_i \perp\!\!\!\perp X_j$.

V. Loi faible des grands nombres

Proposition 16 – Lien entre indépendance (mutuelle) et indépendance deux à deux

L'indépendance (mutuelle) implique l'indépendance deux à deux (réciproque fausse).

Remarque. En pratique, il est rare de démontrer que des vad sont indépendantes; en général ceci est fourni par l'énoncé. Par exemple, si on lance indéfiniment une pièce et si on note $X_i = 1$ si le résultat du i -ème lancer est *pile* et $X_i = 0$ sinon, alors les lancers étant indépendants, les vad $(X_i)_{i \geq 1}$ sont indépendantes. $\square$

Proposition 17

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des vad indépendantes, alors des variables aléatoires $f_1(X_1), f_2(X_2), \dots, f_n(X_n)$ sont indépendantes.

Proposition 18 – Lemme des coalitions

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des vad indépendantes, alors des variables aléatoires de la forme $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Remarque. On dit qu'il y a deux coalitions, on peut étendre ce résultat à un nombre quelconques de coalitions (portant sur des variables aléatoires distinctes). $\square$

Proposition 19 – Variance de la somme de n vad

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des vad qui admettent un moment d'ordre 2, alors :

$$\mathbf{V}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n \mathbf{V}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{Cov}(X_i, X_j)$$

Si de plus $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes (ou même seulement deux à deux indépendantes), alors :

$$\mathbf{V}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbf{V}(X_1) + \dots + \mathbf{V}(X_n)$$

V. Loi faible des grands nombres

Théorème 20 – Loi faible des grands nombres

Si $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de vad deux à deux indépendantes et de même loi, admettant un moment d'ordre 2 et si on note :

$$m = \mathbf{E}(X_1) \quad (m = \mathbf{E}(X_n) \text{ pour tout } n \geq 1)$$

$$\sigma = \sigma(X_1) \quad (\sigma = \sigma(X_n) \text{ pour tout } n \geq 1)$$

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

alors pour tout réel $\varepsilon > 0$: $\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Remarque. Plus généralement, la loi faible des grands nombres permet de faire le lien entre deux manières de voir l'espérance d'une variable aléatoire X . Une première manière de voir $E(X)$ c'est la définition donnée dans le cours :

$$E(X) = \sum x_n P(X = x_n)$$

où les X_n sont les valeurs prises par X .

Une autre manière de voir $E(X)$ c'est d'imaginer que l'on répète l'expérience un grand nombre de fois, et de manière indépendante, et on fait la moyenne des valeurs obtenues $X_1, \dots, X_n$. D'une certaine manière, la loi faible des grands nombres permet de dire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = E(X) \quad \square$$

Remarque. De manière encore plus informelle la loi faible des grands nombres fait le lien entre deux « moyennes » :

- La moyenne des valeurs prises par X , pondérées par la probabilité d'obtenir chaque valeur ;
- La moyenne des valeurs prises par X si on répète l'expérience un grand nombre de fois.

La loi faible des grands nombres affirme que, d'une certaine manière, ces moyennes donnent le même résultat. □

Remarque. Une situation plus concrète : lors de travaux pratiques, on veut mesurer une certaine quantité x . Si on réalise une seule mesure, on va obtenir une quantité X mais, à cause des imprécisions qui entachent toute mesure, on ne peut pas considérer que X est égale à x valeur que l'on souhaite mesurer. On peut cependant considérer que X est une variable aléatoire dont la valeur moyenne, l'espérance, est x . On réalise donc plusieurs mesures successives $X_1, \dots, X_n$ que l'on pourra considérer comme des variables aléatoires indépendantes et de même espérance x – en tout cas c'est l'hypothèse que l'on fait. La loi faible des grands nombres assure que d'une certaine manière la valeur moyenne de résultats obtenus :

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

permet d'approcher x . Par ailleurs, le fait que :

$$V\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{V(X_1)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

traduit le fait que plus on fait de mesures, plus l'incertitude diminue. □

Les résultats à connaître

- Couple de vad, loi conjointe, lois marginales, loi conditionnée.
- Indépendance de deux vad.
- Caractérisation des vad indépendantes.
- Suite (finie ou infinie) de vad indépendantes.
- Images de vad indépendantes.
- Lemme des coalitions.
- Lien entre indépendance et indépendance deux à deux.
- Espérance du produit de vad indépendantes.
- Fonction génératrice de la somme de deux vad indépendantes.
- Somme de vad suivant des lois de Poisson.
- Covariance de deux vad.
- Cas de deux vad indépendantes.
- Variance de la somme de vad.
- Loi faible des grands nombres.

Quelques objectifs du chapitre

- Savoir étudier et utiliser les différentes lois relatives à un couple de vad.
- Savoir utiliser une hypothèse d'indépendance de deux vad.
- Savoir majorer une probabilité du type $\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq \varepsilon)$.
- Savoir établir $\mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

En pratique

► Comment étudier les lois relatives à un couple ?

- Pour déterminer la loi conjointe d'un couple de vad X et Y , il faut tout d'abord déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ puis ensuite, pour tout $x \in X(\Omega)$ et tout $y \in Y(\Omega)$, il faut expliciter $\mathbf{P}(X = x \text{ et } Y = y)$:

— Si X et Y sont indépendantes, on a

$$\mathbf{P}(X = x \text{ et } Y = y) = \mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y)$$

— Si X et Y ne sont pas indépendantes, on peut utiliser

$$\mathbf{P}(X = x \text{ et } Y = y) = \mathbf{P}(X = x|Y = y)\mathbf{P}(Y = y)$$

- On peut obtenir les lois marginales à partir de la loi conjointe :

$$\mathbf{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbf{P}(X = x \text{ et } Y = y)$$

Une fois que l'on connaît la loi conjointe d'un couple, on peut déterminer $\mathbf{P}((X, Y) \in A)$ en notant A sous la forme :

- $A = \{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ (lorsque A est fini) et ainsi

$$\mathbf{P}((X, Y) \in A) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(X = x_i, Y = y_i)$$

- $A = \{(x_n, y_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ (lorsque A est infini et dénombrable) et ainsi

$$\mathbf{P}((X, Y) \in A) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = x_i, Y = y_i)$$

► Comment étudier l'indépendance de vad ?

- Très souvent, c'est l'énoncé qui suggère que certaines vad sont indépendantes (en particulier dans le cas d'une famille de vad mutuellement indépendantes) ;
- Si X est construite en appliquant une fonction à une vad U et Y est construite en appliquant une fonction à une vad V et U et V sont indépendantes, alors X et Y le sont également.
- Pour montrer que deux vad X et Y sont indépendantes, on démontre que :

$$\forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega), \mathbf{P}(X = x \text{ et } Y = y) = \mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y)$$

- Pour montrer que deux vad X et Y ne sont pas indépendantes, il suffit de trouver $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$ tels que

$$\mathbf{P}(X = x \text{ et } Y = y) \neq \mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y)$$

On peut aussi démontrer que $\mathbf{Cov}(X, Y) \neq 0$ ou que $\mathbf{E}(XY) \neq \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$.

► Comment utiliser l'indépendance de deux vad ?

Si deux vad X et Y sont indépendantes, alors :

- $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$;
- $\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$;
- $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$;
- La loi conjointe du couple (X, Y) s'obtient directement à partir des lois marginales.

► Comment utiliser la variance ?

La variance permet de contrôler l'écart qui peut se produire entre une vad et son espérance. Elle intervient dans la majoration de probabilités du type $\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq \varepsilon)$, en particulier :

- la majoration $\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{V}(X)}{\varepsilon^2}$ de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ;
- l'estimation $\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$ de la loi faible des grands nombres.

► Comment utiliser la covariance ?

Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$ (la réciproque est fausse).

*** On pourra également retenir que :

- Si $\mathbf{Cov}(X, Y) \geq 0$, alors Y varie « dans le même sens » que X ce qui signifie que lorsque X augmente, Y augmente également ;
- Si $\mathbf{Cov}(X, Y) \leq 0$, alors Y varie « en sens inverse » de X ce qui signifie que lorsque X augmente, Y diminue.

► Calculs de lois

Pour simplifier, on considère deux v.a.d. X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ et indépendantes.

- La variable aléatoire $X + Y$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X + Y = n) &= \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^n (X = k, Y = n - k)\right) \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X = k, Y = n - k) \text{ (réunion disjointe)} \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X = k)\mathbf{P}(Y = n - k) \text{ (indépendance)}\end{aligned}$$

et il suffit ensuite de simplifier cette somme. On peut aussi utiliser les fonctions génératrices et la relation $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

- La variable aléatoire $Z = \max(X, Y)$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Z \leq n) &= \mathbf{P}(\max(X, Y) \leq n) = \mathbf{P}(X \leq n, Y \leq n) \\ &= \mathbf{P}(X \leq n)\mathbf{P}(Y \leq n) \text{ (indépendance)}\end{aligned}$$

On pourra ensuite retrouver $\mathbf{P}(Z = n)$ avec :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Z = 0) &= \mathbf{P}(Z \leq 0) \\ \forall n \geq 1, \mathbf{P}(Z = n) &= \mathbf{P}(Z \leq n) - \mathbf{P}(Z \leq n - 1)\end{aligned}$$

On peut aussi utiliser les fonctions de répartition en montrant que $F_Z = F_X F_Y$.

- Pour $Z = \min(X, Y)$, on travaillera sur la probabilité $\mathbf{P}(Y \geq n)$.

Illustrations du cours

Exercice 1 *Loi conjointe, lois marginales (1).* On dispose de $n + 1$ urnes numérotées de 0 à n . L'urne numéro i contient i boules noires et une boule blanche. On choisit une urne au hasard, on note X son numéro puis on réalise un tirage dans cette urne et on pose $Y = 1$ si la boule tirée est blanche et $Y = 0$ sinon. Donner la loi conjointe de X et Y et les lois marginales.

Exercice 2 *Loi conjointe, lois marginales (2).* Le nombre de personnes se présentant à un bureau de poste est une variable aléatoire réelle N suivant une loi de Poisson de paramètre λ . Une personne vient pour poster un envoi avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et pour une autre opération (retrait d'argent, gestion d'un compte, etc.) avec la probabilité $q = 1 - p$. On suppose que chaque personne n'effectue qu'une opération et qu'elles font ces opérations indépendamment les unes des autres. On note X le nombre de personnes qui viennent poster une lettre ou un colis et Y le nombre de personnes qui viennent pour une autre opération.

- (a) Déterminer $N(\Omega)$, $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.
- (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[N = n]$.
- (c) En déduire la loi conjointe du couple (X, N) .
- (d) En déduire la loi de X et donner $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

Exercice 3 *Étude d'indépendance ou non pour des vad.* On note X le rang d'apparition du premier *pile* dans une suite infinie de lancers d'une pièce et Y le rang d'apparition du deuxième *pile*.

- (a) Les vad X et Y sont-elles indépendantes?

On considère la vad $Z = Y - X$.

- (b) Déterminer la loi du couple (X, Z) .
- (c) En déduire la loi de Z .
- (d) Démontrer que X et Z sont indépendantes.

Exercice 4 *Somme de deux vad indépendantes suivant la même loi géométrique.* Soient X et Y deux vad indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = X + Y$.

Exercice 5 *Un calcul de covariance.* On reprend la situation de l'exercice 3 où X est le rang d'apparition du premier *pile* dans une suite infinie de lancers d'une pièce, Y le rang d'apparition du deuxième *pile* et $Z = Y - X$. On a démontré que X et Z sont indépendantes et que $X \sim \mathcal{G}(p)$. En utilisant la relation $Y = Z + X$, calculer $\mathbf{Cov}(X, Y)$.