

Variables aléatoires discrètes

◇ Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ est un espace probabilisé.

I. Deux (trois ?) nouvelles lois de probabilités

Définition 1 – Loi uniforme sur un ensemble fini E

Soit E un ensemble fini. Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur E lorsque $X(\Omega) = E$ et :

$$\forall e \in E, \mathbf{P}(X = e) = \frac{1}{\text{card}(E)}$$

Lorsque c'est le cas, on note $X \sim \mathcal{U}(E)$. Le cas particulier le plus fréquent est $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

◇ **Situation type :** on tire un élément de E au hasard (donc suivant une loi uniforme).

Remarque. À connaître également : la loi de Bernoulli et la loi binomiale. □

Définition 2 – Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$

Soit $p \in]0, 1]$. Une variable X suit une loi géométrique de paramètre p lorsque $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$$

Lorsque c'est le cas, on note $X \sim \mathcal{G}(p)$ et on a

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X) &= \frac{1}{p} \\ \mathbf{V}(X) &= \frac{1-p}{p^2} \end{aligned}$$

C'est la loi du rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p .

♦ **Situation type :** on considère une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir *pile* est $p \in]0, 1[$. On lance cette pièce jusqu'à voir apparaître *pile* pour la première fois et on note X le numéro du lancer correspondant.

Remarque. En toute rigueur il faut donner également une valeur à X dans le cas où *pile* n'apparaît jamais au cours des tirages. On peut donner une valeur arbitraire dans cette situation ($X = \infty$, $X = -1$ ou $X = 0$) mais souvent on ne précise pas car la probabilité de ne jamais voir apparaître *pile* est nulle. $\square$

Définition 3 – Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

Soit $\lambda > 0$. Une variable X suit une loi de Poisson de paramètre λ lorsque $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Lorsque c'est le cas, on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et on a

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{V}(X) = \lambda$$

♦ **Situation type :** le nombre de clients qui entrent dans un magasin durant une journée, le nombre de voitures passant à un carrefour durant une heure, plus généralement le nombre de fois où se produit un événement durant un intervalle de temps donné sont généralement modélisés en utilisant des lois de Poisson.

II. Variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$

III. Variables aléatoires discrètes

Notation : Si $f : A \rightarrow B$ est une fonction, on note pour $y \in B$:

$$f^{-1}(y) = \{x \in A \mid f(x) = y\}$$

Ainsi, $f^{-1}(y)$ est une partie de A et $f^{-1}(y)$ a un sens même si f n'est pas bijective. Plus généralement, si $C \subset B$, on note :

$$f^{-1}(C) = \{x \in A \mid f(x) \in C\}$$

On dit que $f^{-1}(C)$ est l'image réciproque de C par f ; ainsi $f^{-1}(y)$ est l'image réciproque de $\{y\}$ par f , c'est aussi l'ensemble des éléments de A qui sont des antécédents de y par f . $\square$

Définition 4 – Variable aléatoire discrète et loi

- On appelle *variable aléatoire discrète (vad)* sur $(\Omega, \mathcal{F})$ (ou sur Ω) toute application X définie sur Ω et telle que :
 - L'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X est fini ou dénombrable;
 - Pour tout $x \in X(\Omega)$, l'ensemble $X^{-1}(x) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$ est un élément de $\mathcal{F}$.

Lorsque $X(\Omega)$ est fini (respectivement infini), on dit que X est une *vad finie* (respectivement *infinie*).

- Si X est une vad, déterminer la loi de X c'est :
 - Expliciter l'ensemble $X(\Omega)$ (ensemble des valeurs prises par X);
 - Pour chaque valeur $x \in X(\Omega)$, déterminer $\mathbf{P}(X = x)$.
- On note $X \sim Y$ lorsque X et Y suivent la même loi, autrement dit lorsque :
 - $X(\Omega) = Y(\Omega)$;
 - $\forall x \in X(\Omega), \mathbf{P}(X = x) = \mathbf{P}(Y = x)$.

On peut aussi utiliser des notations comme $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, $X \sim \mathcal{U}(E)$, etc.

Notations : Si la vad X est à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors pour $x \in \mathbb{R}$, on définit les évènements :

$$\begin{aligned} \{X = x\} &= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\} = X^{-1}(\{x\}) \\ \{X \leq x\} &= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} = X^{-1}([-\infty, x]) \\ \{X < x\} &= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\} = X^{-1}([-\infty, x[) \end{aligned}$$

etc. Plus généralement, si X est une vad, alors pour tout ensemble U , l'ensemble :

$$X^{-1}(U) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in U\}$$

est un évènement que l'on note $\{X \in U\}$ ou $(X \in U)$ ou $[X \in U]$. □

Proposition 5 – Calculs de probabilités associés à une vad

Si X est une vad et U un ensemble, on a :

$$\mathbf{P}(X \in U) = \sum_{x \in X(\Omega) \cap U} \mathbf{P}(X = x)$$

Définition 6 – Espérance d'une vad

Soit X une vad infinie.

- Si X est à valeurs dans $\mathbb{R}$, on dit que X est d'espérance finie (ou admet une espérance finie) lorsque la série $\sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbf{P}(X = x)$ converge absolument. Lorsque c'est le cas, on appelle espérance de X , et on note $\mathbf{E}(X)$, le réel :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbf{P}(X = x)$$

- Si X est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, alors l'espérance de X est :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbf{P}(X = x)$$

en convenant que cette somme est infinie lorsque la série diverge et finie dans le cas contraire.

Remarques.

- Une vad finie admet toujours une espérance et cette espérance est finie.
- Une vad infinie positive admet toujours une espérance, cette espérance peut être égale à $+\infty$.
- Une vad quelconque admet une espérance si, et seulement si, la série associée converge absolument. Si c'est le cas, son espérance est finie. $\square$

Remarque. Étant donnée une vad $X : \Omega \rightarrow E$ et une fonction f définie sur E , on peut considérer la fonction $f \circ X$ qui est à nouveau une vad et on la note plutôt $f(X)$. Par exemple (le plus fréquent), X^2 est également une vad. On admettra que si X et Y sont deux vad avec $X \sim Y$, alors $f(X) \sim f(Y)$. $\square$

Théorème 7 – Transfert

Soient X une vad et f une fonction définie au moins sur $X(\Omega)$. On a équivalence entre :

- (i) La vad $f(X)$ est d'espérance finie;
- (ii) La série $\sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbf{P}(X = x)$ converge absolument

et lorsque c'est le cas :

$$\mathbf{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbf{P}(X = x)$$

Lorsque f est à valeurs positives, on peut considérer que cette dernière égalité est toujours vraie en convenant que $\mathbf{E}(f(X)) = +\infty$ lorsque la série diverge.

IV. Inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev

Proposition 8 – Linéarité, positivité et croissance de l'espérance

Soient X et Y deux v.a.d à valeurs réelles. On a les résultats suivants :

- (1) Si X est d'espérance finie, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λX est d'espérance finie et $\mathbf{E}(\lambda X) = \lambda \mathbf{E}(X)$;
- (2) Si X et Y sont d'espérance finie, alors $X + Y$ est d'espérance finie et $\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y)$;
- (3) Si $X(\omega) \geq 0$ pour tout $\omega \in \Omega$, alors $\mathbf{E}(X) \geq 0$;
- (4) Si X et Y sont d'espérance finie et $X(\omega) \leq Y(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$, alors $\mathbf{E}(X) \leq \mathbf{E}(Y)$.
- (5) Si $|X| \leq Y$ et Y est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie.
- (6) Si X est positive et $\mathbf{E}(X) = 0$, alors l'évènement $[X = 0]$ est réalisé presque sûrement (autrement dit $\mathbf{P}(X = 0) = 1$).

Proposition 9 – Cas où X^2 est d'espérance finie

Si X est une v.a.d et X^2 est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie.

Définition 10 – Variance

Soit X une v.a.d telle que X^2 est d'espérance finie, on appelle variance de X le réel noté $\mathbf{V}(X)$ et défini par :

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^2) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$$

C'est un nombre positif; on appelle écart-type de X le réel $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$.

Remarque. Comme X^2 est d'espérance finie, $\mathbf{E}(X^2)$ et $\mathbf{E}(X)$ sont toutes deux définies. $\square$

Proposition 11

Si X est une v.a.d telle que X^2 est d'espérance finie, alors pour $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbf{V}(aX + b) = a^2 \mathbf{V}(X)$.

$\triangle$ **Remarque.** En général, $\mathbf{V}(X + Y) \neq \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$. $\square$

IV. Inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev

Théorème 12 – Inégalité de Markov

Si X est une v.a.d positive et d'espérance finie, alors :

$$\forall a > 0, \mathbf{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbf{E}(X)}{a}$$

Théorème 13 – Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X est une v.a.d telle que X^2 est d'espérance finie, alors :

$$\forall a > 0, \mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathbf{V}(X)}{a^2}$$

Remarque. Ceci explique que la variance mesure la dispersion d'une variable aléatoire autour de sa moyenne. Par contre ces inégalités sont en général assez grossières, en particulier si a est petit, on a $V(X)/a^2 > 1$. De manière générale, si la loi de X est connue, on obtiendra des meilleures majoration en calculant directement les probabilités. Ces inégalités sont donc intéressantes quand seules $E(X)$ et $V(X)$ sont connues. $\square$

Remarque. Soit X est une variable à valeurs réelles.

- On dit que X est centrée lorsque X est d'espérance finie et $E(X) = 0$.
- On dit que X est réduite lorsque X admet une variance et $V(X) = 1$.
- Si X^2 est d'espérance finie et $\sigma(X) > 0$, alors $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée et réduite. $\square$

Les résultats à connaître

Programme de première année :

- Loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale. Espérance et variance.

Programme de deuxième année :

- Loi d'une vad.
- Espérance d'une vad (cas d'une vad positive).
- Écriture de l'espérance dans le cas d'une vad à valeurs dans $\mathbb{N}$.
- Théorème du transfert.
- Linéarité, positivité et croissance de l'espérance.
- Si X^2 est d'espérance finie, alors X également.
- Variance, $V(aX + b)$.
- Inégalité de Markov.
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- Série génératrice d'une vad.
- Condition pour que X admette une espérance (et savoir retrouver $V(X)$ à partir de $G'_X(1)$ et $G''_X(1)$).
- Loi géométrique, espérance, variance, savoir retrouver sa série génératrice. Interprétation usuelle.
- Loi de Poisson, espérance, variance, savoir retrouver sa série génératrice.

Quelques objectifs du chapitre

- Savoir déterminer la loi d'une vad.
- Savoir calculer l'espérance et la variance.
- Savoir expliciter la série génératrice et la fonction de répartition.

En pratique

► Comment déterminer la loi d'une vad ?

Pour déterminer la loi d'une variable aléatoire X , il faut tout d'abord expliciter l'ensemble $X(\Omega)$: c'est l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable aléatoire X . Ensuite, pour tout $x \in X(\Omega)$, il faut expliciter la probabilité $\mathbf{P}(X = x)$. Penser à toutes les méthodes dont on dispose pour calculer une probabilité.

► Comment calculer une espérance ?

- Si la variable suit une loi connue, on utilise les résultats du cours.
- Sinon, on applique la définition. On peut également penser au théorème du transfert.
- Si X est une vad à valeurs dans $\mathbb{N}$ et si les probabilités $\mathbf{P}(X \geq n)$ se calculent facilement, alors on peut utiliser la relation $\mathbf{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geq n)$.
- Penser aux propriétés de l'espérance (linéarité).
- On peut parfois utiliser la série génératrice de X .

⚠ Penser à signaler la convergence des séries qui interviennent dans les calculs.

► Comment calculer une variance ?

- Si la variable suit une loi connue, on utilise les résultats du cours.
- Sinon, on applique la définition.
- On peut parfois utiliser la série génératrice de X .

⚠ Penser à signaler la convergence des séries qui interviennent dans les calculs.

Illustrations du cours

Exercice 1 *Trois vad.*

- (1) On lance deux dés à 6 faces équilibrés et on note X la somme des points obtenus. Proposer un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ainsi qu'une vad X modélisant cette expérience aléatoire. Expliciter les événements $[X = 10]$ et $[X \geq 10]$.
- (2) On lance indéfiniment une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir *pile* est $p \in]0, 1[$. On note Y le rang du lancer où *pile* apparaît pour la première fois. Proposer un ensemble Ω ainsi qu'une vad Y modélisant cette expérience aléatoire. Expliciter les événements $[Y = 2]$, $[Y \geq 2]$ et $[Y \in \mathbb{N}^*]$. Donner la loi de Y puis calculer $\mathbf{P}(Y \geq 2)$. Calculer la probabilité que Y soit pair.
- (3) Un sauteur en hauteur participe à un concours. La barre est successivement mise à des hauteurs numérotées $1, 2, \dots, n, \dots$ et on fait l'hypothèse que pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité que le sauteur passe la hauteur n est $1/n$. On suppose également que les différents sauts sont indépendants. On note Z le numéro du dernier saut réussi avec la convention $Z = 0$ si le premier saut n'est pas réussi et $X = \infty$ si tous les sauts sont réussis. Donner la loi de Z .

Exercice 2 *Calculs d'espérance.* Établir que les variables aléatoires Y et Z de l'exercice 1 admettent une espérance et la calculer.

Exercice 3 *Théorème du transfert, propriétés de l'espérance.* Soit $\lambda > 0$. Soit X une vad telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbf{P}(X = n) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!}$$

- (a) Démontrer que la variable aléatoire $\frac{1}{1+X}$ admet une espérance et la calculer.
- (b) Démontrer que la variable aléatoire $\frac{1}{(1+X)(2+X)}$ admet une espérance et la calculer.
- (c) En utilisant la linéarité de l'espérance, déterminer $\mathbf{E}\left(\frac{1}{2+X}\right)$.

Exercice 4 *Calculs de variance.* Établir que les variables aléatoires Y et Z de l'exercice 1 admettent une variance. Calculer $\mathbf{V}(Z)$.

Exercice 5 *Estimation avec les inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev.* On effectue n lancers d'un dé supposé parfait et on note X le nombre de fois où sort le 1. On note $F = X/n$ la fréquence d'apparition du 1 au cours de ces n lancers.

- (a) Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.
- (b) Déterminer l'espérance et la variance de F .
- (c) Déterminer un majorant de $\mathbf{P}(F \geq 0.5)$.
- (d) Déterminer un rang n à partir duquel $\mathbf{P}\left(\left|F - \frac{1}{6}\right| \geq 0.1\right) \leq \frac{1}{100}$.

Exercice 6 *Exercice type avec la loi de Poisson.* Un péage comporte m guichets. On suppose que le nombre N de voitures arrivant une 1 heure suit une loi de Poisson de paramètre λ . On suppose de plus que les conducteurs choisissent au hasard le guichet où ils passent et que ces choix sont indépendants. Pour $1 \leq i \leq m$, on note X_i le nombre de voitures passant en 1 heure par le i ème guichet.

- (a) Pour $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\mathbf{P}(X_i = k | N = n)$.
- (b) En déduire la loi de X .
- (c) Déterminer $\mathbf{E}(X_i)$ et $\mathbf{V}(X_i)$.

Exercice 7 *Séries génératrices.*

- (1) Déterminer la série génératrice d'une vad X telle que $X \sim \mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0, 1[$. Retrouver $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.
- (2) Déterminer la série génératrice d'une vad X telle que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Retrouver $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

Exercice 8 *Une expression de la série génératrice.* Montrer que pour une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ et tout $t \in [-1, 1]$, on a :

$$G_X(t) = \mathbf{E}(t^X)$$

Exercice 9 *La loi géométrique est sans mémoire.* Soit X une vad suivant une loi géométrique de paramètre p . Démontrer que :

$$\forall k, n \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(X > n + k | X > n) = \mathbf{P}(X > k)$$