Topologie et continuité

Rappels : extrémums de fonctions d'une variable réelle

Théorème 1 – Existence

Si I est un segment de $\mathbb{R}$ (i.e. un intervalle fermé et borné) et $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors f possède un maximum et un minimum sur I.

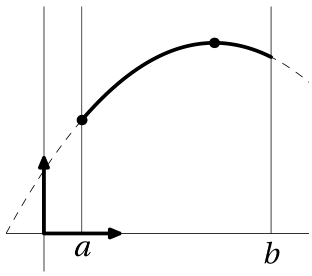

Figure 1.

Théorème 2 – Condition nécessaire

Si I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 et f admet un extrémum en $x_0 \in I$, alors $f'(x_0) =$ 0.

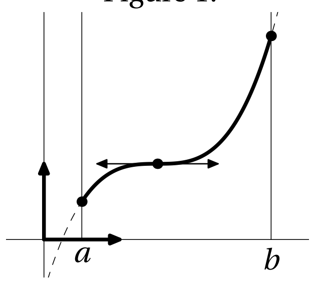

Figure 2.

⚠ ***Remarque.***

- Sur un segment, un extrémum n'est pas forcément atteint en un point où la dérivée s'annule (Figure 1).
- Un point où la dérivée s'annule ne correspond pas nécessairement à un extrémum (Figure 2).
- Même si c'est le cas, il peut ne s'agir que d'un extrémum local (Figure 3). □

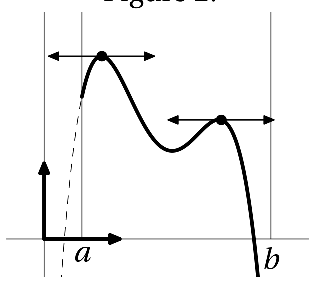

Figure 3.

Corollaire 3

Si I est un segment de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe C^1, alors les extrémums de f sont atteints soit à l'intérieur de I en des points où f' s'annule, soit sur la frontière de I.

⋄ L'objet du chapitre est de généraliser les notions de fermé, borné, ouvert, continuité, intérieur, frontière pour pouvoir traiter le cas de fonctions de plusieurs variables. La notion de fonction de plusieurs variables de classe C^1 sera vue dans un chapitre ultérieur.

◇ Dans ce chapitre, E et F sont des espaces vectoriels normés. Les définitions et résultats énoncés dans la suite dépendent de la norme choisie mais sont invariants par changement de norme équivalente.

I. Parties d'un espace vectoriel

Rappel 4 – Boule ouverte, boule fermée

Pour $a \in E$ et $r > 0$ on définit :

(a) *La boule ouverte de centre a et de rayon r :* $\mathcal{B}(a, r) = \{u \in E \mid \|u - a\| < r\}$ *;*

(b) *La boule fermée de centre a et de rayon r :* $\overline{\mathcal{B}}(a, r) = \{u \in E \mid \|u - a\| \leqslant r\}$.

Définition 5 – Partie bornée

Une partie A de E est dite bornée lorsque :

$$\exists M > 0,\ \forall u \in A,\ \|u\| \leqslant M$$

II. Limites et continuité

Définition 6 – Application bornée

Une application $f : A \to F$ où A est une partie de E est dite bornée lorsque :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+,\ \forall x \in A,\ \left\|f(x)\right\| \leqslant M$$

Définition 7 – Limite d'une application

Soient une application $f : A \to F$ où A est une partie de E, a un point adhérent à A et $\ell \in F$. On dit que f admet ℓ pour limite en a lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists r > 0,\ \forall x \in A,\ \|x - a\| \leqslant r \implies \left\|f(x) - b\right\| \leqslant \varepsilon$$

On note alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ *ou* $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Remarques.

- La limite ℓ et a sont nécessairement des éléments des espaces vectoriels F et E, on ne définit donc pas ainsi de limite $\pm\infty$ ni de limite quand x tend vers $\pm\infty$.
- L'élément a doit être adhérent à A pour que l'on puisse faire tendre x vers a tout en ayant $x \in A$, A domaine de définition de f. □

Définition 8 – Continuité en un point, continuité globale

Soit $f : A \to F$ où A est une partie de E.

- *On dit que f est continue en $a \in A$ lorsque $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$.*
- *On dit que f est continue sur A lorsque f est continue en tout point de A.*

On note $\mathrm{C}(A,F)$ l'ensemble des fonctions définies et continues sur A et à valeurs dans F.

Théorème 9 – Limite et coordonnées

On suppose que F est de dimension finie. Soient $f : A \to F$ où A est une partie de E, a adhérent à A, $\ell \in F$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de F. On note dans cette base :

$$\ell = \ell_1 e_1 + \cdots + \ell_n e_n$$
$$f(x) = f_1(x)e_1 + \cdots + f_n(x)e_n \quad (f(x) \in F)$$

On a alors l'équivalence :

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \iff \forall i [\![1,n]\!],\ f_i(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_i$$

Corollaire 10 – Continuité et coordonnées

Avec les mêmes notations, pour $a \in A$, on a l'équivalence :

$$f \text{ est continue en } a \iff f_1, \dots, f_n \text{ sont continues en } a$$

puis l'équivalence :

$$f \text{ est continue sur } A \iff f_1, \dots, f_n \text{ sont continues sur } A$$

Proposition 11 – Caractérisation séquentielle des limites

Soient $f : A \to F$ où A est une partie de E, a adhérent à A et $\ell \in F$. On a équivalence entre :

(i) $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$;

(ii) Pour toute suite (a_n) à valeur dans A et telle que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, on a $f(a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Remarques. L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ est la composition des limites. L'implication $(ii) \Rightarrow (i)$ permet de ramener tout problème de limite à un problème de limite de suite. Application typique : pour une utilisation avec le théorème de convergence dominée. □

Corollaire 12 – Caractérisation séquentielle de la continuité

Soient $f : A \to F$ où A est une partie de E et $a \in A$. On a équivalence entre :

(i) f est continue en a ;

(ii) Pour toute suite (u_n) à valeurs dans A telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, on a $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$.

Proposition 13 – Limites et opérations

Soient $f : A \to F$, $g : A \to F$, $\lambda : A \to \mathbb{K}$ et a adhérent à A. On a les résultats suivants :

(1) *Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell'$, alors $f(x) + g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell + \ell'$;*

(2) *Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ et $\lambda(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell' \in \mathbb{R}$, alors $\lambda(x) f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell' \ell$;*

(3) *Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ et $h(y) \xrightarrow[y \to \ell]{} \ell'$ avec $h : A' \to G$ et $f(A) \subset A' \subset F$ alors $h \circ f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell'$.*

Corollaire 14 – Opérations et continuité

Soient A une partie de E. Si $f, g \in C(A, F)$, alors $f + g \in C(A, F)$. Si $\lambda \in C(A, \mathbb{K})$, alors $\lambda f \in C(A, F)$. Soient B une partie de F et G un espace vectoriel normé de dimension finie. Si $f \in C(A, F)$ et $g \in C(B, G)$ et $f(A) \subset B$, alors $g \circ f \in C(A, G)$.

III. Ensembles et fonctions continues

Notation : Poyr $f : E \to F$ et B une partie de F, on note :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

(image réciproque de B par f). □

Proposition 15 – Image réciproque d'un ouvert par une application continue

Si $f : E \to F$ est une application continue, alors :

(1) *Pour tout ouvert U de F, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de E ;*

(2) *Pour tout fermé A de F, $f^{-1}(A)$ est un fermé de E.*

Corollaire 16

Si $f : E \to \mathbb{R}$ est continue, alors l'ensemble $U = \{x \in E \mid f(x) > 0\}$ est un ouvert de E et les ensembles $C = \{x \in E \mid f(x) \geqslant 0\}$ et $C' = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$ sont des fermés de E.

Théorème 17 – Image d'un fermé borné par une application continue

Si E est de dimension finie, A est une partie non vide, fermée et bornée de E et $f : A \to \mathbb{R}$ est continue, alors f est bornée sur A et atteint ses bornes.

IV. Applications particulières

Définition 18 – Application lipschitzienne

Soient $f : A \to F$ où A est une partie de E et $k \in \mathbb{R}^+$. L'application f est dite k-lipschitzienne lorsque :

$$\forall x, y \in A, \ \|f(x) - f(y)\| \leqslant k \|x - y\|$$

Proposition 19 – Continuité d'une application lipschitzienne

Si A est une partie de E et $f : A \to F$ est lipschitzienne, alors f est continue.

Théorème 20 – Cas des applications linéaires

On suppose que E est de dimension finie. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On a les résultats suivants :

(1) L'application f est continue sur E ;
(2) Il existe $k \geqslant 0$ tel que : $\forall x \in E, \|f(x)\| \leqslant k\|x\|$;
(3) En particulier, f est lipschitzienne.

Théorème 21 – Cas des applications multilinéaires

Si $E_1, \dots, E_n$ sont des espaces vectoriels normés de dimension finie et $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ est multilinéaire, alors f est continue.

⋄ Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note φ_i la fonction qui à x associe sa i-ème coordonnée dans $\mathscr{B}$. On dit qu'une application $f : E \to \mathbb{K}$ est polynomiale lorsqu'elle peut s'écrire comme une combinaison linéaire de produits de fonctions φ_i. On dit qu'une application $f : E \to F$ est polynomiale lorsqu'elle peut s'écrire comme une somme de produits de fonctions polynomiales de E dans $\mathbb{K}$ et d'éléments de F.

Théorème 22

Si E est de dimension finie et $f : E \to F$ est polynomiale, alors f est continue.

V. Raisonnement par densité et continuité

Définition 23 – Partie dense

On dit qu'une partie $A \subset E$ est dense dans E lorsque $\overline{A} = E$.

Remarque. Autrement dit, A est dense dans E lorsque tout élément de E est la limite d'une suite d'éléments qui appartiennent à A. □

Les résultats à connaitre

- Définition d'une partie convexe.
- Point intérieur à une partie, point adhérent à une partie.
- Définition d'ouvert, fermé, adhérence, frontière.
- Ouverts, fermés et intersections, réunions.
- Caractérisation séquentielle des fermés et des points adhérents.
- Application bornée.
- Définition de la limite d'une application.
- Utilisation des coordonnées pour déterminer la limite en dimension finie.
- Caractérisation séquentielle de la limite.
- Définition d'une application continue.
- Caractérisation séquentielle de la continuité.
- Caractérisation de la continuité par les coordonnées en dimension finie.
- Image d'un fermé borné par une application continue en dimension finie.
- Images réciproques d'ouverts et de fermés par des applications continues.
- Définition d'une application lipschitzienne.
- Une application lipschitzienne est continue.
- En dimension finie, une application linéaire est lipschitzienne donc continue.
- En dimension finie, une application multilinéaire est continue.
- En dimension finie, une application polynomiale est continue.
- Définition d'une partie dense.

Quelques objectifs du chapitre

- Savoir établir qu'une application est continue.
- Interpréter les propriétés de limites et continuité en termes d'approximations.
- Savoir établir que des parties sont ouvertes ou fermées.
- Interpréter géométriquement les notions d'ensembles ouverts ou fermés.

En pratique

▸ Comment démontrer qu'une application f est continue ?

On considère $f : A \to F$ avec $A \subset E$. Plusieurs possibilités, par difficulté croissante :

- En dimension finie, utiliser le fait que f est linéaire, ou multilinéaire, ou lipschitzienne, ou polynomiale ;
- Écrire f comme une composée de fonctions continues ;
- En dimension finie, montrer que $f(x)$ peut s'écrire à partir des coordonnées de x dans une base de E à partir de sommes, produits, quotients dont le dénominateur ne s'annule pas et de composées par des fonctions continues (par exemple pour l'application $M \mapsto \det M$) ;
- On rencontre souvent des applications f définies sur $\mathbb{R}^2$ avec un problème (une valeur particulière) en $(0,0)$. Pour monter que f est continue sur $\mathbb{R}^2$:

- On montre tout d'abord que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en appliquant les théorèmes généraux (sommes, produits, quotients, etc. de fonctions continues) ;
- On montre ensuite que f est continue en $(0,0)$ en établissant une majoration de la forme :

$$\left\| f(r\cos\theta, r\sin\theta) - f(0,0) \right\| \leqslant \varphi(r)$$

où $\varphi(r)$ ne dépend que de r et $\varphi(r) \xrightarrow[r\to 0]{} 0$.

Pour démontrer que f n'est pas continue en $(0,0)$, on montre que $f(x,0)$ ou $f(0,y)$ ne tendent pas vers $f(0,0)$ lorsque $x \to 0$ ou $y \to 0$ (on peut aussi considérer $f(x,x)$, $f(x,-x)$, $f(x,x^2)$ ou d'autres du même type). Si on dispose d'une fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ avec un problème en (x_0, y_0), on peut toujours se ramener à un problème en $(0,0)$ en considérant la fonction $f : (x,y) \mapsto (x_0 + x, y_0 + y)$.

▸ Comment démontrer qu'une partie $A \subset E$ est fermée ?

Deux possibilités :

- On applique la caractérisation séquentielle : on considère une suite (a_n) d'éléments de A et on suppose que cette suite converge dans E vers une limite ℓ. On démontre alors que $\ell \in A$ (pour ce faire, en règle générale, on écrit la définition du fait que $a_n \in A$ et on justifie qu'il est légitime de « passer à la limite ») ;
- On montre que l'ensemble A peut s'écrire $A = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$ pour une certaine fonction f. Il suffit alors de montrer que f est continue ;
- On peut également utiliser des intersections et/ou réunions.

▸ Comment démontrer qu'une partie $A \subset E$ est ouverte ?

On rencontre principalement deux méthodes :

- On pose $F = E \setminus A$ et on montre que F est une partie fermée de E (cf. méthode précédente) ;
- On montre que l'ensemble A peut s'écrire $A = \{x \in E \mid f(x) > 0\}$ pour une certaine fonction f. Il suffit alors de montrer que f est continue.
- On peut également utiliser des intersections et/ou réunions.

▸ *** Comment démontrer un résultat par densité et continuité ?

Supposons que l'on désire démontrer que $f(x) = 0$ pour tout $x \in E$ (avec f une fonction définie sur E). Pour établir ce résultat en procédant par densité et continuité, il faut tout d'abord démontrer que f est continue. Il faut ensuite considérer un sous-ensemble A de E pour lequel on a les deux propriétés suivantes :

(1) Pour tout $x \in A$, on a $f(x) = 0$;
(2) L'ensemble A est dense dans E.

On considère alors $x \in E$ et (a_n) suite d'éléments de A telle que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$, on a $f(a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ par continuité de f et $f(a_n) = 0$ quel que soit n, donc $f(x) = 0$.

Illustrations du cours

Exercice 1 *Étude de parties de* $\mathbb{R}^2$ *(1).*
(a) Démontrer que $]0,1[^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. (b) Démontrer que $[0,+\infty[^2$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$. (c) Démontrer que l'ensemble $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leqslant y\leqslant 1-x\right\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 *Continuité d'applications définies sur* $\mathbb{R}^2$.

$$f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}\\ (x,y) & \mapsto & \dfrac{xy}{x^2+y^2+1}\end{array}\qquad g:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}\\ (x,y)\neq(0,0) & \mapsto & \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\\ (0,0) & \mapsto & 0\end{array}\qquad h:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}\\ (x,y)\neq(0,0) & \mapsto & \dfrac{xy}{x^2+y^2}\\ (0,0) & \mapsto & 0\end{array}$$

Démontrer que les applications f et g sont continues. Démontrer que l'application h n'est pas continue.

Exercice 3 *Continuité d'applications matricielles.*

(a) Montrer que les applications $\mathrm{tr}:\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\to\mathbb{K}$ et $\det:\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\to\mathbb{K}$ sont continues.
(b) Montrer que l'application $t: M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\mapsto M^\top$ est continue.
(c) Montrer que l'application $f:\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\\ (A,B) & \mapsto & A\times B\end{array}$ est continue.

Exercice 4 *Étude de parties de* $\mathbb{R}^2$ *(2).*

(a) Démontrer que $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
(b) Démontrer que $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geqslant 0 \text{ ou } y\geqslant 0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
(c) Démontrer que l'ensemble $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x<y^2\right\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 *Étude de parties de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
(a) Démontrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. (b) Démontrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. (c) Démontrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est borné. (d) Démontrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas convexe.

Exercice 6 *Étude de parties de* $\mathbb{R}_n[X]$. Que peut-on dire des ensembles

$$A=\{P\in\mathbb{R}_n[X] \mid P(0)>0\}\quad \text{et}\quad B=\{P\in\mathbb{R}_n[X] \mid P(0)\geqslant 0\}$$

Exercice 7 *Écrit CCP PC 2020.* Dans cette partie, on suppose que $n=2$. On note :

$$B_2=\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid x_1^2+x_2^2\leqslant 1\right\}$$

et l'application $f:B_2\to\mathbb{R}$ est définie par : $\forall (x_1,x_2)\in B_2,\ f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2+4x_1x_2$.

(1) Justifier que l'application f admet un maximum et un minimum sur B_2.
(2) En étudiant la fonction $t\mapsto f(\cos t,\sin t)$, déterminer les extrémums de l'application f sur la frontière $S_2=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid x_1^2+x_2^2=1\}$ de B_2.

Exercice 8 *Écrit CCP PC 2008.* L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de la norme euclidienne canonique et du produit scalaire canonique. On considère $S\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit :

$$E=\left\{X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n \mid \forall i\in[\![1,n]\!],\ x_i\geqslant 0\right\},\quad \Sigma=\left\{X\in\mathbb{R}^n \mid \|X\|=1\right\},\quad C=E\cap\Sigma$$

et $\varphi:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}\\ X & \mapsto & \langle SX,X\rangle.\end{array}$

(1) Montrer que E est un fermé de $\mathbb{R}^n$. Montrer que C est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$.
(2) Donner l'expression de $\varphi(X)$ en fonction des coefficients de S et ceux de X. En déduire que φ est continue sur $\mathbb{R}^n$.
(3) Démontrer que $\mu=\sup\limits_{X\in C}\varphi(X)$ existe.