Suites de fonctions

I. Modes de convergence

II. Propriétés de la limite d'une suite de fonctions

Les résultats à connaitre

- Définition de la convergence simple pour une suite de fonctions.
- Définition de la convergence uniforme pour une suite de fonctions.
- La convergence uniforme entraine la convergence simple (connaitre un contre-exemple pour la réciproque).
- Théorème de continuité pour une suite de fonctions.
- Théorème d'échange limite intégrale avec convergence uniforme.
- Théorème de classe C^1 pour une suite de fonctions.

Quelques objectifs du chapitre

- Connaitre les notions de convergence simple et convergence uniforme.
- Avoir compris les liens entre ces deux notions.
- Savoir établir qu'une suite de fonctions converge simplement.
- Savoir établir qu'une suite de fonctions converge (ou ne converge pas) uniformément.

En pratique

▸ Comment établir la convergence simple ?

Pour établir la convergence simple sur un intervalle I d'une suite de fonctions (f_n), on considère $x \in I$ fixé et on détermine la limite de la suite (numérique) $(f_n(x))$. On peut penser à utiliser toutes les techniques usuelles permettant d'établir l'existence d'une limite (calcul direct, équivalent, étude de la monotonie, etc.)

▸ Comment établir la convergence uniforme ?

Pour établir la convergence uniforme sur un intervalle I d'une suite de fonctions (f_n), il faut déjà connaitre la limite simple f de cette suite de fonctions. On doit alors établir une majoration de la forme :

$$\forall x \in I,\ \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \alpha_n$$

où α_n est indépendant de x et $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

▸ Comment établir la *non* convergence uniforme ?

Pour montrer qu'une suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur I, on peut :

- Déterminer la borne supérieure sur I de $|f_n - f|$ (par une étude de fonctions) et vérifier que cette quantité ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$;
- Utiliser la contraposée des théorèmes du cours, typiquement :
  - — si les fonctions f_n sont continues sur I et la fonction f n'est pas continue sur I, alors la suite de fonctions (f_n) ne peut pas converger uniformément vers f sur I,
  - — si les fonctions f_n sont continues sur $[a,b]$ et $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \neq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, alors la suite de fonctions (f_n) ne peut pas converger uniformément vers f sur I.

▸ Comment démontrer la continuité de la limite ?

Pour montrer que la limite f d'une suite de fonctions (f_n) est continue sur I :

- Montrer que chaque fonction f_n est continue sur I ;
- Montrer que la suite de fonctions converge uniformément sur I (ou : converge uniformément sur tout segment $[a, b] \subset I$).

L'hypothèse difficile à obtenir est la convergence uniforme.

▸ Comment démontrer le caractère C^1, C^k, C^∞ de la limite ?

Pour montrer que la limite f d'une suite de fonctions (f_n) est de classe C^1 sur un intervalle I :

- Montrer que chaque fonction f_n est de classe C^1 sur I ;
- Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur I ;
- Montrer que la suite (f_n') converge uniformément sur I (ou : converge uniformément sur tout segment $[a, b] \subset I$).

Pour montrer que la limite f d'une suite de fonctions (f_n) est de classe C^k $(k \geqslant 1)$ sur un intervalle I :

- Montrer que chaque fonction f_n est de classe C^k sur I ;
- Montrer que les suites $(f_n), (f_n'), \dots, (f_n^{(k-1)})$ convergent simplement sur I ;
- Montrer que la suite $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur I (ou : converge uniformément sur tout segment $[a, b] \subset I$).

▸ Comment échanger une limite et une intégrale ?

Pour échanger une limite et une intégrale, on dispose de deux théorème :

— le premier est celui que l'on a vu dans ce chapitre. Il est valable uniquement pour une intégrale sur un segment $[a, b]$, l'hypothèse « difficile » à démontrer est la convergence uniforme sur $[a, b]$ de la suite de fonctions (f_n) ;

— le second sera vu ultérieurement (on l'appelle théorème de convergence dominée). Il est valable sur un intervalle quelconque I. Il faut établir la convergence simple sur I de la suite de fonctions (f_n) ainsi qu'une hypothèse de domination (cette dernière est en général la plus « difficile »).

Illustrations du cours

Exercice 1 *Convergence simple / uniforme (1).* Établir la convergence simple / uniforme sur $[0,1]$ de la suite de fonctions (f_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,1],\ f_n(x) = x^n \ln x$$
$$f_n(0) = 0$$

Exercice 2 *Convergence simple / uniforme (2).* Étudier la convergence simple / uniforme de la suite de fonctions (f_n) définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x) = nx\mathrm{e}^{-nx^2}$$

Soit $a > 0$, montrer que la convergence est uniforme sur $[a, +\infty[$.

Exercice 3 *Convergence simple / uniforme (3) et théorème de continuité (1).* Étudier la convergence simple sur $[0,1]$ de la suite de fonctions (f_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \frac{x^n \mathrm{e}^{-x}}{1+x^n}$$

Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur l'intervalle $[0,1]$ puis sur des intervalles inclus dans $[0,1]$.

Exercice 4 *Le théorème de continuité (2).* Pour $n \geqslant 1$, on définit la fonction :

$$f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k+x^2}$$

Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ et démontrer que sa limite est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 *Échange limite intégrale avec convergence uniforme.* Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{n\mathrm{e}^x}{n+x}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 6 *Le théorème de classe* C^1. Pour $n \geqslant 1$, on définit la fonction :

$$f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx^2)}{1+k^3}$$

Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ et démontrer que sa limite est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice ✎ *À faire vous-même pour voir si vous avez compris.* Étudier la convergence simple puis uniforme sur le segment $[0,1]$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $f_n : x \mapsto nx^n(1-x)$. Pour un réel a tel que $0 < a < 1$, étudier la convergence uniforme sur le segment $[0, a]$.

Vrai/Faux

On considère la suite de fonctions (f_n) définie par : pour tout entier naturel n, pour tout t appartenant à l'intervalle $I = [0,+\infty[$,

$$f_n(t) = \frac{e^t}{1+t^n}$$

(1) La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I.
(2) La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers la fonction g définie sur I par $g(t) = e^t$ pour tout $t \in [0,1]$ et $g(t) = 0$ pour tout $t \in]1,+\infty[$.
(3) La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers une fonction nécessairement continue sur I puisque f_n, pour tout entier naturel n, est continue sur I.
(4) La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers la fonction g définie sur I par $g(t) = e^t$ pour tout $t \in [0,1[$ et $g(t) = 0$ pour tout $t \in [1,+\infty[$.
(5) La suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur I.
(6) La suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément sur I car (f_n) est une suite de fonctions continues sur I dont la limite simple g n'est pas continue sur I.
(7) La suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur l'intervalle $[0,\alpha]$ pour tout $\alpha \in]0,1[$

On considère deux suites $(f_n)_{n\geqslant 0}$ et $(g_n)_{n\geqslant 0}$ de fonctions définies au moins sur l'intervalle $[0,1]$.

(8) Si $\forall x \in [0,1]$, $\left|f_n(x)\right| = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ alors la suite (f_n) converge uniformément vers 0.
(9) Si la suite (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[0,1[$ et si $f_n(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors la suite (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$.
(10) Si $\forall x \in [0,1]$, $|f_n(x)| \leqslant g_n(x)$ et la suite (g_n) converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$, alors la suite (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$.
(11) Si pour tout réel a tel que $0 < a \leqslant 1$, la suite (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[0,a]$, alors la suite (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$.
(12) Si pour tout réel a tel que $0 < a < 1$, la suite (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[0,a]$, alors la suite (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[0,1[$.
(13) Si pour tout réel a tel que $0 \leqslant a \leqslant 1$, la suite (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[0,a]$, alors la suite (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$.
(14) Si la suite (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$ et si $x \in [0,1]$, alors $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
(15) Si la suite (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$ et si (x_n) est une suite d'éléments de $[0,1]$ telle que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, alors $f_n(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
(16) Si la suite (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$ et si (x_n) est une suite d'éléments de $[0,1]$, alors $f_n(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
(17) S'il existe une suite (x_n) d'éléments de $[0,1]$ telle que $f_n(x_n) \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$, alors la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers 0 sur $[0,1]$.
(18) Si la suite de fonction (f_n) ne converge pas uniformément vers 0 sur $[0,1]$, alors la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers 0 sur $[0,1/2]$.

(19) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un réel $x_n \in [0,1]$ tel que f_n est croissante sur $[0, x_n]$, décroissante sur $[x_n, 1]$ et de plus $f_n(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors la suite (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$.

(20) Si pour tout entier naturel n, f_n est décroissante sur $[0,1]$ et si de plus $f_n(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $f_n(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors la suite (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$.

(21) Si pour tout entier naturel n, f_n possède un maximum sur $[0,1]$ obtenu en $x_n \in [0,1]$ et si de plus $f_n(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors la suite (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$.

(22) Si la suite de fonctions $(f_n - g_n)$ converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$, alors les suites de fonctions (f_n) et (g_n) convergent uniformément sur $[0,1]$.

(23) Si les suites de fonctions (f_n) et (g_n) convergent uniformément sur $[0,1]$, alors la suite de fonctions $(f_n + g_n)$ converge uniformément sur $[0,1]$.

On considère de plus une fonction f définie sur $[0,1]$.

(24) Si la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$ et à partir d'un certain rang chaque fonction f_n est continue sur $[0,1]$, alors f est continue sur $[0,1]$.

(25) Si la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$ et à partir d'un certain rang chaque fonction f_n est de classe C^1 sur $[0,1]$, alors f est de classe C^1 sur $[0,1]$.

(26) Si la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$ et à partir d'un certain rang chaque fonction f_n est de classe C^1 sur $[0,1]$, alors f est continue sur $[0,1]$.

(27) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0,1]$ et $\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$, alors la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers 0 sur $[0,1]$.

(28) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0,1]$ et $\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$, alors la suite de fonctions (f_n) ne converge pas simplement vers 0 sur $[0,1]$.

(29) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0,1]$ et $\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$, alors la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers 0 sur $[0,1/2]$.

(30) Si chaque fonction f_n est continue et positive sur $[0,1]$ et $\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers 0 sur $[0,1]$.

1V2F3F4F5F6V7V8F9V10V11V12F13V14V15V16V17V18F19F20V21F22F23V24V25F26V27V28F29F30F