Séries numériques (compléments)

◇ Rappels de PCSI à relire : suites, séries numériques, borne supérieure maximum et valeur obsolue.

I. Quelques rappels

Définition 1 – Convergence, convergence absolue, somme, reste

Soit $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ une série (numérique) à termes réels ou complexe. Pour $N \geqslant n_0$, on définit la somme partielle S_N par :

$$S_N = \sum_{n=n_0}^{N} u_n$$

- *On dit que la série $\sum u_n$ converge lorsque la suite (S_N) admet une limite finie. Dans le cas contraire, on dit que la série $\sum u_n$ diverge.*
- *On dit que la série $\sum u_n$ converge absolument lorsque la série (à termes positifs) $\sum |u_n|$ converge.*
- *On dit que la suite (u_n) est sommable lorsque la série $\sum |u_n|$ converge.*

Théorème 2 – Condition nécessaire de convergence

Si la série numérique $\sum u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (réciproque fausse).

Théorème 3 – Condition suffisance de convergence

Si la série numérique $\sum u_n$ converge absolument, alors elle converge (réciproque fausse).

Définition 4 – Somme et reste pour une série convergente

Soit $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ une série (numérique) à termes réels ou complexe et convergente.

- *La somme de cette série est notée $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ et est définie par :*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} S_N \quad avec \quad S_N = \sum_{n=n_0}^{N} u_n$$

- *On définit également le reste d'ordre N de cette série convergente :*

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n \quad pour\ N\ tel\ que\ N+1 \geqslant n_0$$

de sorte que $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = S_N + R_N$.

Théorème 5 – de comparaison (avec une série à termes positifs)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries avec $v_n \geqslant 0$ apcr. *On a les résultats suivants :*

(1) Si $|u_n| \leqslant v_n$ apcr *et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge absolument donc converge ;*
(2) Si $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge absolument donc converge ;
(3) Si $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge absolument donc converge ;
(4) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

II. Deux nouveaux critères de convergence

III. Opérations sur les séries

Théorème 6 – Somme de deux séries

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries. On a les résultats suivants :

(1) Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, alors la série $\sum(u_n + v_n)$ converge ;
(2) Si la série $\sum u_n$ converge et la série $\sum v_n$ diverge, alors la série $\sum(u_n + v_n)$ diverge.

⚠ ***Remarques.***

- On ne peut rien dire de la somme de deux séries divergentes.
- Si la série $\sum(u_n + v_n)$ converge, rien ne permet en général d'écrire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

□

Théorème 7 – Cas des séries à termes complexes

Soit $\sum z_n$ une série. On note $a_n = \mathrm{Re}(z_n)$ et $b_n = \mathrm{Im}(z_n)$. On a équivalence entre :
(i) La série $\sum z_n$ converge ;
(ii) Les séries à termes réels $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent.
De plus, en cas de convergence, on a l'égalité :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} z_n = \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n + \mathrm{i} \sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$$

ce qui s'écrit également :

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} z_n\right) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \mathrm{Re}(z_n) \quad et \quad \mathrm{Im}\left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} z_n\right) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \mathrm{Im}(z_n)$$

Théorème 8 – Produit de Cauchy

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries. On définit une série $\sum w_n$ en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

On dit que la série $\sum w_n$ est le produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.
Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument, alors $\sum w_n$ converge absolument et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

Les résultats à connaitre

- Définition d'une série convergente/absolument convergente.
- Condition nécessaire de convergence (la réciproque est fausse, connaitre un contre-exemple).
- Séries de référence : série géométrique, série de Riemann, série exponentielle.
- La convergence absolue implique la convergence (la réciproque est fausse, connaitre un contre-exemple).
- Série à termes positifs : convergente si, et seulement si, les sommes partielles sont majorées (savoir redémontrer rapidement ce résultat).
- Comparaison intégrale (et savoir encadrer une somme partielle par des intégrales).
- Critère de d'Alembert (connaitre un exemple de SATP $\sum u_n$ convergente telle que $u_{n+1}/u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et un exemple de SATP $\sum u_n$ divergente telle que $u_{n+1}/u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$).
- Critère des séries alternées.
- Formule de Stirling.

Quelques objectifs du chapitre

- Connaitre la signification des notations $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ ou $\sum u_n$, $\sum_{n=n_0}^{N} u_n$ et $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$;
- Savoir étudier la nature d'une série ;
- Savoir calculer la somme d'une série ;
- Savoir déterminer une valeur approchée de la somme d'une série ;
- Connaitre les opérations sur les séries et les conditions d'application ;
- Savoir réaliser un encadrement par des intégrales ;
- Savoir réaliser un télescopage ;
- Savoir utiliser le lien entre suites et séries.

En pratique

▸ Comment étudier la convergence d'une série ?

Pour étudier la convergence de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$:

- Si la série est à termes positifs, on peut appliquer l'une des méthodes suivantes :
  - — Chercher à établir un équivalent de u_n ou le comparer à une série convergente ;
  - — Utiliser la comparaison avec une intégrale ;
  - — Utiliser la règle de d'Alembert ;
  - — Écrire $\sum u_n$ comme un produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.
- Si u_n n'est pas de signe constant, on peut essayer de montrer que $\sum u_n$ est absolument convergente. On considère donc la série $\sum |u_n|$ qui est à termes positifs.
- Si u_n n'est pas de signe constant et $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente, on peut :
  - — Regarder si le théorème des séries alternées s'applique ;

— Faire un développement asymptotique de u_n de manière à l'écrire comme une somme de series alternées ou à termes positifs.

- En dernier recours, on peut considérer la suite $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et montrer qu'elle est convergente.

▸ Comment calculer la somme d'une série convergente ?

Les séries dont on sait directement calculer la somme :

- Les séries géométriques $\sum q^n$ avec $|q| < 1$;
- Les séries exponentielles $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ avec $z \in \mathbb{C}$;
- Les séries de la forme $\sum (u_{n+1} - u_n)$ (télescopage).

On peut parfois utiliser des formules de Taylor (inégalité de Taylor-Lagrange ou formule de Taylor reste intégrale) qui permettent d'obtenir des majorations du type :

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^k \right| \leqslant M_n$$

Si on arrive à établir que le majorant tend vers 0 quand n tend vers l'infini, alors par passage à la limite :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^k$$

▸ Comment déterminer une approximation d'une somme de série ?

Pour une série convergente $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, on utilise en général les sommes partielles $\sum_{n=0}^{N} u_n$ pour approcher la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Pour contrôler cette approximation, il faut majorer la quantité :

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=0}^{N} u_n \right| = |R_N| \quad \text{avec} \quad R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$$

Pour majorer $|R_N|$, on peut :

- Utiliser le théorème des séries alternées (s'il s'applique) ;
- Majorer le terme général de R_N en utilisant des séries connues (géométriques par exemple) ;
- Établir un encadrement par des intégrales.

▸ *** À retenir…

- Le fait que $H_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$ (justification par encadrement par des intégrales).
- Et $H_n = \ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$ (poser $u_n = H_n - \ln(n)$ et étudier la série $\sum_{n\geqslant 1} (u_{n+1} - u_n)$).
- Savoir justifier la divergence de la série $\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n\ln n}$ (comparaison intégrale).
- Pour $a > 1$ et $b \in \mathbb{R}$, savoir justifier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n^a (\ln n)^b}$.
- Pour $b > 1$, savoir justifier la convergence de $\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n(\ln n)^b}$ (comparaison intégrale).

Illustrations du cours

Exercice 1 *Série géométrique.* Montrer que la série de terme général :

$$u_n = \frac{\cos(na)}{2^n}$$

est convergente et déterminer sa somme.

Exercice 2 *Télescopage.* Démontrer que la série numérique

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$$

converge et calculer sa somme.

Exercice 3 *Calcul de somme : formule de Taylor.* Démontrer que la série numérique

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$$

converge et calculer sa somme.

Exercice 4 *Reste d'une série géométrique.* Soit $q \in \mathbb{C}$ avec $|q| < 1$. Calculer pour $N \in \mathbb{N}$:

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} q^n$$

Exercice 5 *Quelques séries classiques (1).* Étudier la nature de la série $\sum u_n$ dans chacun des cas suivants :

$$u_n = \frac{1}{n^{3/2}\ln(n)}; \qquad v_n = \frac{\ln(n)}{n^2}; \qquad w_n = \frac{\ln^2(n)}{\sqrt{n}}; \qquad t_n = \frac{1}{\ln(n)\sqrt{n}}$$

Exercice 6 *Quelques séries classiques (2) et comparaison intégrale.* Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature de la série $\sum u_n$ à l'aide d'une comparaison intégrale :

$$u_n = \frac{1}{n\ln(n)^2}; \qquad u_n = \frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}}$$

Exercice 7 *Une série classique (3) et comparaison intégrale.* On considère ici la série $\sum u_n$ avec

$$u_n = \frac{1}{n\ln(n)}$$

(a) À l'aide d'une comparaison avec une intégrale, déterminer la nature de la série $\sum u_n$.
(b) Déterminer un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de la suite $(S_n)_{n\geqslant 2}$ définie par :

$$\forall n \geqslant 2,\ S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}.$$

Exercice 8 *Série alternée.* Démontrer que la série numérique

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

converge. On note S sa somme et S_N sa somme partielle d'indice N. Déterminer un entier N_0 tel que S_{N_0} soit une valeur approchée de S à 10^{-3} près. Déterminer le signe de S. Comparer S_{2N}, S_{2N+1} et S.

Exercice 9 *Règle de d'Alembert.*

(a) Étudier la nature de la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$.

(b) Étudier suivant les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$.

Exercice 10 *Produit de Cauchy.* Soit $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| < 1$. Démontrer la convergence et calculer la somme de la série :

$$\sum_{n\geqslant 0} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right) x^n$$

Indication : considérer les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x^n$

Exercice ✎ *À faire vous-même pour voir si vous avez compris.*

(a) Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)^2}{n^2}$.

(b) Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$.

(c) On pose, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \exp\left(\dfrac{(-1)^n \ln(n)}{n} \right) - 1$. Établir :

$$u_n = \frac{(-1)^n \ln(n)}{n} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{\ln(n)^2}{2n^2} \right)$$

En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Vrai/Faux

Dans la suite, α est un paramètre réel.

(1) La série $\sum\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n}\right)$ converge.

(2) La série $\sum\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n^2}\right)$ converge.

(3) La série $\sum\dfrac{1}{n^\alpha}\left(\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)-1\right)$ converge si, et seulement si, $\alpha>1$.

On considère une série $\sum u_n$ à termes positifs.

(4) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-n}$, alors la série $\sum\dfrac{u_n}{n^\alpha}$ converge pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$.

(5) Si $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{n}\right)$, alors la série $\sum\dfrac{u_n}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha>0$.

(6) Si $u_n=\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

(7) Si $\dfrac{1}{n}=\mathrm{o}(u_n)$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

(8) Si $\dfrac{1}{n^\alpha}=\mathrm{o}(u_n)$ et la série $\sum u_n$ converge, alors $\alpha>1$.

(9) Si $\sum u_n$ diverge alors $u_n\geqslant\dfrac{1}{n}$ à partir d'un certain rang.

(10) Si la série $\sum u_n$ converge, alors il existe $\alpha>1$ tel que $u_n=\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$.

Dans la suite, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries à termes de signes quelconques.

(11) Si $|u_n| = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(|v_n|)$ et la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.

(12) Si la série $\sum u_n$ converge et la série $\sum(u_n+v_n)$ converge, alors la série $\sum v_n$ converge.

(13) Si la série $\sum u_n$ diverge et la série $\sum(u_n+v_n)$ converge, alors la série $\sum v_n$ converge.

(14) Si la série $\sum u_n$ diverge et la série $\sum(u_n+v_n)$ diverge, alors la série $\sum v_n$ converge.

(15) Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la suite (u_n) ne tend pas vers 0.

(16) Si la série $\sum|u_n|$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.

(17) Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum|u_n|$ diverge.

(18) Si la série $\sum|u_n|$ diverge grossièrement, alors la série $\sum u_n$ diverge.

(19) Si la série $\sum u_n$ converge et la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_nv_n$ converge.

(20) Si la suite (u_n) converge vers 0 et n'est pas décroissante, alors la série $\sum(-1)^n u_n$ diverge.

(21) Si la série $\sum(-1)^n u_n$ converge alors $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

(22) Si la série $\sum(-1)^n u_n$ converge alors (u_n) est décroissante.

(23) Si la série $\sum(-1)^n u_n$ converge et (u_n) est positive, alors (u_n) est décroissante.

(24) Si la série $\sum(-1)^n u_n$ converge, alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, $\left|\sum_{n=N}^{+\infty}(-1)^n u_n\right|\leqslant|u_N|$.

(25) Si $u_n\neq0$ à partir d'un certain rang, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ell$ et $\ell\in\,]-1,1[$, alors la série $\sum u_n$ converge.

(26) Si $u_n\neq0$ à partir d'un certain rang, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ell$ et $\ell\in\mathbb{R}\setminus\,]-1,1[$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

(27) Si la suite (u_n) converge, alors la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge.
(28) Si la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge, alors la suite (u_n) converge.
(29) Pour $q \in \mathbb{C}$ avec $|q|<1$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.
(30) La relation $\displaystyle\sum_{n=0} q^n = \frac{1}{1-q}$ reste vraie pour $q=-1$.

1F2V3F4V5F6F7V8V9F10F11F12V13F14F15F16V17V18V19F20F21V22F23F24F25V26F27V28V29V30F