Séries entières

I. Rayon de convergence

II. Opérations

Notation : Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ sont deux séries entières, alors :

- Leur somme est la série entière $\sum_{n\geqslant 0} (a_n + b_n) z^n$;
- Leur produit (de Cauchy) est la série entière $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ avec : $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. □

Proposition 1 – Opérations

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.
On note :

- *R_s le rayon de convergence de la série entière somme $\left(\sum a_n z^n\right) + \left(\sum b_n z^n\right)$;*
- *R_p celui de la série entière produit (de Cauchy) $\left(\sum a_n z^n\right) \times \left(\sum b_n z^n\right)$.*

On a les résultats suivants :

(1) $R_s \geqslant \min(R_a, R_b)$ *et si de plus* $R_a \neq R_b$ *alors* $R_s = \min(R_a, R_b)$ *;*
(2) $R_p \geqslant \min(R_a, R_b)$.

Remarque. Les inégalités peuvent être strictes. □

III. Propriétés de la somme

Proposition 2 – Cas réel : intégration et dérivation

Soit $\sum a_n x^n$ *une série entière (variable réelle) de rayon de convergence* R *et soit* f *sa somme. Si* $R>0$*, alors on a les résultats suivants :*

(1) f *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-R,R[$ *;*

(2) Le rayon de convergence de la série $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ *est égal à* R *et :*

$$\forall x \in]-R,R[,\ f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

(3) Plus généralement : $\forall k \in \mathbb{N},\ a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$ *;*

(4) Le rayon de convergence de la série $\sum \dfrac{a_n x^{n+1}}{n+1}$ *est égal à* R *et :*

$$\forall a,b \in]-R,R[,\ \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(b^{n+1}-a^{n+1})$$

et en particulier : $\forall x \in]-R,R[,\ \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$

Proposition 3 – Cas complexe : continuité

Si $\sum a_n z^n$ *est une série entière (variable complexe) de rayon de convergence* $R>0$*, alors sa somme* f *est continue sur le disque ouvert de convergence.*

Corollaire 4 – Unicité des coefficients / Unicité du DSE

Soient $\sum a_n x^n$ *et* $\sum b_n x^n$ *deux séries entières de rayons de convergence respectifs* R_a *et* R_b*. S'il existe* r *tel que* $0<r<\min(R_a,R_b)$ *et :*

$$\forall x \in]-r,r[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n$ *(et* $R_a = R_b$*).*

Remarque. Si f est la somme de la série entière $\sum a_n x^n$ alors pour tout entier n :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$$ □

Remarque. Si f et g sont des sommes de séries entières, de rayons de convergence respectifs R et R' et si il existe $r \in]0,\min(R,R')]$ tel que :

$$\forall x \in]0,r[,\ f(x) = g(x)$$

alors $R = R'$ et $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in]-R,R[$. On a même $f(z) = g(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z|<R$. □

IV. Fonctions développables en série entière

Définition 5 – Fonction DSE

On dit qu'une fonction f est développable en série entière au voisinage de 0 *lorsqu'il existe un réel $r > 0$ et une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$ tels que :*

$$\forall x \in]-r, r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Proposition 6 – Opérations sur les fonctions DSE

Si f et g sont des fonctions DSE *au moins sur* $]-r, r[$*, alors :*

(1) Quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\lambda f + \mu g$ est DSE *sur* $]-r, r[$ *;*
(2) Le produit fg est DSE *sur* $]-r, r[$ *;*
(3) La fonction f est dérivable sur $]-r, r[$ et la dérivée de f sur $]-r, r[$ est DSE *sur* $]-r, r[$ *;*
(4) La fonction f est continue sur $]-r, r[$ et toute primitive de f sur $]-r, r[$ est DSE *sur* $]-r, r[$.

Proposition 7

Si une fonction f est DSE *sur* $]-r, r[$*, alors f est de classe* C^∞ *sur* $]-r, r[$ *et :*

$$\forall x \in]-r, r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

⚠ ***Remarque.*** La réciproque est fausse. Pour une fonction f de classe C^∞ sur $]-R, R[$, on peut définir la série entière

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

On l'appelle série de Taylor de f. Si sa somme est égale à f, alors f est DSE au voisinage de 0 mais ce n'est pas toujours le cas. Si f est DSE au voisinage de 0, alors son DSE est nécessairement sa série de Taylor. □

Théorème 8 – Égalité de Taylor avec reste intégral

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ (non vide et non réduit à un point), $n \in \mathbb{N}$, $f : I \to \mathbb{K}$ est de classe C^{n+1} et $a, x \in I$, alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \end{aligned}$$

En particulier, si f est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et si $x \in]-R, R[$, alors :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

avec $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

Proposition 9 – DSE des fonctions $\exp, \mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \cos, \sin$

Les fonctions $\exp$, ch, sh, $\cos$ *et* $\sin$ *sont* DSE *sur* $\mathbb{R}$ *et :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad \mathrm{ch}\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad \mathrm{sh}\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(ces séries entières sont de rayon de convergence infini).

Proposition 10 – Séries géométrique et DSE de la fonction $\ln$

Les fonctions $x \mapsto (1-x)^{-1}$ et $x \mapsto (1+x)^{-1}$ sont DSE *sur $]-1, 1[$ et :*

$$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$$

La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est DSE *sur $]-1,1[$ et : $\forall x \in]-1,1[$, $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$.*
Ces trois séries entières ont pour rayon de convergence 1.

Proposition 11 – Fonction arctan

La fonction $\arctan$ *est* DSE *sur $]-1,1[$ et : $\forall x \in]-1,1[$, $\arctan x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.*
Cette série entière a pour rayon de convergence 1.

Proposition 12 – Fonctions puissances

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. *La fonction* $x \mapsto (1+x)^\alpha$ *est* DSE *sur* $]-1,1[$ *et :*

$$\forall x \in]-1,1[,\ (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^n}{n!}$$

La série obtenue a pour rayon de convergence 1. *En particulier :*

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)x^n}{n!}$$

Proposition 13 – Séries géométrique et exponentielle d'une variable complexe

(1) *La série entière* $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ *a pour rayon de convergence* $+\infty$ *et :* $\forall z \in \mathbb{C},\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z)$.

(2) *La série entière* $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ *a pour rayon de convergence* 1 *et si* $|z| < 1$ *:* $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

Les résultats à connaitre

- Lemme d'Abel.
- Rayon de convergence (définition, disque ouvert de convergence, caractérisation).
- Inégalités sur le rayon de convergence.
- Utilisation de relations de comparaisons.
- Rayon de convergence de $\sum n^p a_n z^n$, $p \in \mathbb{Z}$, $\sum |a_n| z^n$, $\sum n^\alpha z^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Rayon de convergence de la somme et du produit de deux séries entières (connaitre un contre exemple pour montrer que l'inégalité pour la somme peut être stricte).
- Séries entière d'une variable réelle : caractère C^∞, dérivation, intégration et expression des coefficients.
- Unicité des coefficients.
- Série entière d'une variable complexe : continuité sur le disque ouvert de convergence.
- Fonction DSE.
- Une fonction DSE est de classe C^∞, expression des coefficients.
- Opérations sur les fonctions DSE.
- Les DSE des fonctions usuelles.
- Formule de Taylor reste intégral.

Quelques objectifs du chapitre

- Savoir déterminer un rayon de convergence.
- Savoir établir des inégalités sur le rayon de convergence.
- Savoir calculer la somme d'une série entière.
- Savoir manipuler une fonction définie comme une somme de série entière.
- Savoir effectuer des DSE (penser aux opérations).

En pratique

▸ Comment déterminer le rayon de convergence ?

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. En utilisant la définition et le(s) lemme(s) d'Abel :

- Si pour $|z| < R$, la suite $(a_n z^n)$ converge vers 0 et pour $|z| > R$, la suite $(a_n z^n)$ ne converge pas vers 0, alors le rayon de convergence est R ;
- Si pour $|z| < R$, la suite $(a_n z^n)$ est bornée et pour $|z| > R$, la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée, alors le rayon de convergence est R ;
- Si pour $|z| < R$, $\sum a_n z^n$ converge et pour $|z| > R$, $\sum a_n z^n$ diverge, alors le rayon de convergence est R.

Typiquement, la dernière propriété s'applique lorsque l'on utilise la méthode de d'Alembert (cf. exemples du cours). Plus généralement, on peut obtenir des inégalités (qui peuvent éventuellement être strictes) :

- Si $\sum a_n z^n$ converge, alors $R \geqslant |z|$;
- Si $a_n z^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors $R \geqslant |z|$;
- Si $(a_n z^n)$ est bornée, alors $R \geqslant |z|$;
- Si $\sum a_n z^n$ diverge, alors $R \leqslant |z|$;

- Si $(a_n z^n)$ ne converge pas vers 0, alors $R \leqslant |z|$;
- Si $(a_n z^n)$ n'est pas bornée, alors $R \leqslant |z|$.

Si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b, on peut utiliser des comparaisons :
- Si $|a_n| \leqslant |b_n|$ à partir d'un certain rang, alors $R_a \geqslant R_b$;
- Si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$;
- Si $a_n = \mathrm{o}(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$;
- Si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

▸ Quelles sont les propriétés de la somme d'une série entière ?

- Si $\sum a_n x^n$ est de rayon de convergence R et de somme S, alors la fonction S est définie et de classe C^∞ sur $]-R, R[$.
- Si $\sum a_n z^n$ est de rayon de convergence R et de somme S, alors la fonction S est définie et continue sur $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$.

▸ Comment calculer la somme d'une série entière ?

- Revoir les méthodes de calcul de la somme d'une série numérique (série géométrique, série exponentielle, développements de Taylor et sommes télescopiques) ;
- Reconnaitre la dérivée ou une primitive d'une série entière connue ;
- Si la suite (a_n) vérifie une relation de récurrence, faire apparaitre cette relation dans le calcul de la somme et faire apparaitre une équation différentielle.

▸ Comment développer une fonction f en série entière ?

Pour montrer que f est DSE et calculer les coefficients a_n du développement, on peut :
- Utiliser les opérations (sommes et produits, dérivation et intégration) ;
- Si f est une fraction rationnelle, utiliser une décomposition en éléments simples de la fonction f ;
- Si f est définie par une intégrale à paramètres, écrire la fonction dans l'intégrale comme somme d'une série et faire une interversion série-intégrale :

$$f(x) = \int_I F(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(t) x^n \,\mathrm{d}t \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\int_I b_n(t)\,\mathrm{d}t \right)}_{=a_n} x^n$$

  avec les justifications nécessaires ;
- Si f est de classe C^∞, utiliser un développement de Taylor et montrer la convergence sur un intervalle $]-r, r[$ (rare en pratique).

Si on sait que f est DSE, alors on peut obtenir les coefficients a_n du développement :

- Avec la relation $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}$, si les $f^{(n)}(0)$ sont faciles à expliciter ;
- En utilisant une équation différentielle dont f est solution pour obtenir une condition sur les coefficients a_n du développement (on verra dans le chapitre sur les équations différentielles que l'on peut également démontrer ainsi que f est DSE).

▸ Quels sont les DSE usuels ?

Fonction = DSE	**Valable sur**	**(Rayon)**
$\exp(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$\mathbb{R}$	$(+\infty)$
$\mathrm{ch}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$\mathbb{R}$	$(+\infty)$
$\mathrm{sh}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\mathbb{R}$	$(+\infty)$
$\cos(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	$\mathbb{R}$	$(+\infty)$
$\sin(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\mathbb{R}$	$(+\infty)$
$\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	$]-1,1[$	(1)
$\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$	$]-1,1[$	(1)
$\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$	$]-1,1[$	(1)
$\arctan x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$]-1,1[$	(1)
$(1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^n}{n!}$	$]-1,1[$	(1)
$\sqrt{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)x^n}{n!}$	$]-1,1[$	(1)

Illustrations du cours

Exercice 1 *Rayon de convergence.* Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln n}{2^n n^2}z^n$ (règle de d'Alembert) ;

(b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln n}{n^2+1}z^{n^2}$ (règle de d'Alembert) ;

(c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right)z^n$ (utilisation d'un équivalent) ;

(d) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\sin(n)z^n$ (établir des inégalités sur le rayon de convergence) ;

(e) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}n^{((-1)^n)}z^n$ (établir des inégalités sur les coefficients de la série).

Exercice 2 *Rayon de convergence et calcul de la somme.*

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{nx^n}{2^n}$.

(b) Déterminer la somme de la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n}{2^n}$.

Exercice 3 *Développement en série entière.*

(a) Démontrer que $f : x \mapsto \ln(3+x)$ admet un DSE que l'on déterminera.

(b) Faire de même avec $g : x \mapsto \ln(3-x)$ et $h : x \mapsto \ln(9-x^2)$.

Exercice 4 *Solutions* DSE *d'une équation différentielle.* Soit F définie pour $x \in \mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

(a) Montrer que F est développable en série entière en 0.

(b) À l'aide d'une équation différentielle, déterminer les coefficients du développement de F.

Exercice 5 *Utilisation d'un* DSE. On considère l'application $f : \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \dfrac{\sin(x)}{x}\end{array}$.

(a) Démontrer que l'application f est prolongeable par continuité en 0. On note $\widetilde{f}$ ce prolongement.

(b) Démontrer que $\widetilde{f}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

(c) En déduire que $\widetilde{f}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et déterminer $\widetilde{f}^{(n)}(0)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 *Équations différentielles et* DSE. Déterminer les solutions DSE au voisinage de 0 de l'équation différentielle :

$$x^2y'' + 6xy' + (6-x^2)y = -1$$

Exercice ✎ *À faire vous-même pour voir si vous avez compris.* Déterminer le rayon de convergence de la série entière :

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mathrm{ch}(n)}{n}x^n$$

Déterminer la somme de cette série, sur l'intervalle ouvert de convergence.

Vrai/Faux

On considère une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R.

(1) Si $\sum a_n$ diverge, alors $R < 1$.
(2) Si $\sum a_n$ converge, alors $R \geqslant 1$.
(3) Si la suite (a_n) ne tend pas vers 0, alors $R \leqslant 1$.
(4) Les séries entières $\sum a_{2n} x^{2n}$ et $\sum a_{2n+1} x^{2n+1}$ ont le même rayon de convergence.
(5) La série entière $\sum a_{2n} x^{2n}$ a pour rayon de convergence R.
(6) La série entière $\sum n^2 a_n x^n$ a pour rayon de convergence R.

On considère $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

(7) Si $|z_1| \leqslant |z_2|$ et $\sum a_n z_1^n$ diverge, alors $\sum a_n z_2^n$ diverge.
(8) Si $|z_1| \leqslant |z_2|$ et $\sum a_n z_2^n$ converge, alors $\sum a_n z_1^n$ converge.
(9) Si $|z_1| < |z_2|$ et $\sum a_n z_1^n$ diverge, alors $\sum a_n z_2^n$ diverge.
(10) Si $|z_1| < |z_2|$ et $\sum a_n z_2^n$ converge, alors $\sum a_n z_1^n$ converge.
(11) Si $|z_1| < |z_2|$ et $(a_n z_2^n)$ est bornée, alors $\sum a_n z_1^n$ converge absolument.
(12) Si $\sum a_n z_1^n$ diverge, alors $|z_1| > R$.
(13) Si $\sum a_n z_1^n$ converge absolument, alors $|z_1| < R$.

On considère une deuxième série entière $\sum b_n x^n$ de rayon de convergence R'.

(14) Si $a_n \leqslant b_n$, alors $R \leqslant R'$.
(15) Si $a_n \leqslant b_n$, alors $R \geqslant R'$.
(16) Si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, alors $R = R'$.
(17) Si $a_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(b_n)$, alors $R \geqslant R'$.
(18) Si $a_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(b_n)$ et $b_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(a_n)$, alors $R = R'$.
(19) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$ et $|z| < R'$, la série $\sum (a_n + b_n) z^n$ converge.
(20) Si $z \in \mathbb{C}$ et $R < |z| < R'$, alors la série $\sum (a_n + b_n) z^n$ diverge.
(21) Si $z \in \mathbb{C}$ et $R < |z|$ et $R' < |z|$, alors la série $\sum (a_n + b_n) z^n$ diverge.

On suppose $R > 0$, on note f la somme de la série entière $\sum a_n x^n$ sur l'intervalle $I =]-R, R[$.

(22) La fonction f est continue sur I.
(23) La fonction f est intégrable sur I.
(24) La fonction f est dérivable sur I.
(25) La fonction f est bornée sur I.
(26) Si $R \neq +\infty$, alors f admet une limite finie en R^-.
(27) Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geqslant 0$, alors la fonction f est positive sur I.
(28) Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2n+1} = 0$, alors la fonction f est paire sur I.
(29) $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\mathrm{e}^{1/x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{-n}}{n!}$.
(30) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) + \sin(-x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

1f2v3v4f5f6v7f8f9v10v11v12f13f14f15f16v17v18v19v20v21f22v23f24v25f26f27f28v29v30f