Probabilité

⋄ Le programme de deuxième année consiste essentiellement à généraliser les résultats étudiés en première année (univers Ω et variables aléatoires finies) au cas où Ω est infini et les variables aléatoires peuvent prendre une infinité de valeurs.

⋄ Quelques problèmes qui se posent :

- Pour calculer l'espérance d'une variable aléatoire X il faut faire la somme :

$$\sum_{v \text{ valeur prise par } X} v \times \mathbf{P}(X = v)$$

  Si X ne prend qu'un nombre fini de valeurs c'est facile. Si l'ensemble des valeurs prises par X est quelconque (infini) il faut définir comment faire la somme (somme d'une infinité de valeurs).
- Pour des raisons techniques, il n'est pas toujours possible de considérer que tout sous-ensemble de Ω est un évènement. L'ensemble $\mathscr{T}$ n'est donc pas toujours égal à $\mathscr{P}(\Omega)$ (ensemble de toutes les parties de Ω). Cependant, $\mathscr{T}$ doit vérifier certaines conditions et être en particulier stable par réunion, intersection et passage au complémentaire. Un ensemble $\mathscr{T}$ vérifiant ces conditions est appelé une tribu.

Les solutions à ces problèmes existent mais nécessitent un travail théorique qui est décrit ci-dessous. Le programme précise explicitement que ces points ne feront l'objet d'aucune évaluation spécifique.

I. Quelques exemples d'expériences aléatoires

⋄ Pour modéliser une expérience aléatoire en probabilités, on doit définir trois objets mathématiques :

- Un ensemble Ω appelé *univers* qui représente tous les résultats possibles (on dit aussi les *issues* ou les *réalisations*) de l'expérience aléatoire ;
- Un ensemble $\mathscr{T}$ qui contient tous les évènements que l'on va considérer. Un évènement est une propriété qui peut être réalisée ou non une fois l'expérience aléatoire terminée. De manière équivalente, un évènement est une partie de Ω. Par conséquent, les éléments de $\mathscr{T}$ sont des parties de Ω ;

- Une fonction $\mathbf{P}$ qui associe à chaque évènement A sa probabilité $\mathbf{P}(A)$.

Si A est un évènement et $\omega \in \Omega$ est le résultat de l'expérience, on dit que A est réalisé si $\omega \in A$ et dans le cas contraire, on dit que A n'est pas réalisé. Notons qu'en général dans les exercices on ne précise pas Ω (et encore moins $\mathscr{T}$).

Exemple. Lancer d'une pièce qui amène *pile* avec la probabilité p :

$$\Omega = \{P, F\}$$

Exemples d'évènements : $\{P\}$ (le tirage a donné *pile*), $\{F\}$ mais aussi $\emptyset$ et Ω. On aura :

$$\mathbf{P}(\emptyset) = 0,\ \mathbf{P}(\Omega) = 1,\ \mathbf{P}(\{P\}) = p,\ \mathbf{P}(\{F\}) = 1 - p$$

Si le résultat de l'expérience est P et si on considère l'évènement $A = \{F\}$, alors A n'est pas réalisé. □

Exemple. Lancer d'un dé équilibré à 6 faces.

$$\Omega = [\![1, 6]\!]$$

Exemples d'évènements : $\{1, 3, 5\}$ (le résultat obtenu est pair), $\{6\}$ (on a tiré un 6). On aura :

$$\forall i \in [\![1, 6]\!],\ \mathbf{P}(\{i\}) = \frac{1}{6}$$ □

Exemple. On lance indéfiniment une pièce équilibrée.

$$\Omega = \left\{(u_n)_{n\geqslant 1} \mid \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = P \text{ ou } u_n = F\right\} = \{P, F\}^{\mathbb{N}^*}$$

Quelques exemples d'évènements :

$$A = \{(u_n)_{n\geqslant 1} \in \Omega \mid \forall n \geqslant 1,\ u_n = F\}$$
$$B_k = \{(u_n)_{n\geqslant 1} \in \Omega \mid u_1 = \cdots = u_{k-1} = F \text{ et } u_k = P\}$$

L'évènement A est « tous les tirages donnent *face* », l'évènement B_k est « on obtient *pile* pour la première fois au k-ième lancer. » Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on a deux évènements particulièrement intéressants :

$$P_i = \{(u_n)_{n\geqslant 1} \in \Omega \mid u_i = P\}$$
$$F_i = \{(u_n)_{n\geqslant 1} \in \Omega \mid u_i = F\}$$

Autrement dit, P_i est l'évènement « le résultat du i-ème lancer est *pile* » et F_i est l'évènement « le résultat du i-ème lancer est *face*. » La pièce étant équilibrée, on considèrera que $\mathbf{P}(P_i) = \mathbf{P}(F_i) = 1/2$. On peut utiliser les P_i et les F_i pour définir d'autres évènements, par exemple :

$$B_k = F_1 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap P_k$$
$$A = \bigcap_{n\geqslant 1} F_n$$ □

Rappel 1 – Lois de De Morgan

Si A et B sont deux parties de Ω, alors $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ et $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

Rappel 2 – Unions et intersections infinies

Si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est un suite de parties de Ω, alors on note :

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \{x\in\Omega \mid \exists n\in\mathbb{N},\ x\in A_n\}$$
$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n = \{x\in\Omega \mid \forall n\in\mathbb{N},\ x\in A_n\}$$

Intuitivement, $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = A_0\cup A_1\cup A_2\cup\cdots$ et $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n = A_0\cap A_1\cap A_2\cap\cdots$.
Les lois de de Morgan restent valable dans ce cas :

$$\overline{\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n} = \bigcup_{n=0}^{+\infty}\overline{A_n} \quad \text{et} \quad \overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n} = \bigcap_{n=0}^{+\infty}\overline{A_n}$$

II. Fondements théoriques

1 Ensembles dénombrables

Définition 3 – Ensemble dénombrable, ensemble au plus dénombrable

- *Un ensemble E est dit dénombrable lorsqu'il existe une bijection $\varphi:\mathbb{N}\to E$.*
- *Un ensemble E est dit au plus dénombrable lorsqu'il est soit fini, soit dénombrable.*

Remarques.

- De manière équivalente, E est dénombrable s'il existe une bijection $\psi:E\to\mathbb{N}$.
- La terminologie « au plus dénombrable » permet de regrouper le cas fini (programme de première année) et infini mais dénombrable (programme de deuxième année).
- Si $\varphi:\mathbb{N}\to E$ est une bijection, alors on peut noter :

$$\begin{aligned} E &= \left\{\varphi(n) \mid n\in\mathbb{N}\right\} \\ &= \{x_n \mid n\in\mathbb{N}\} \quad \text{en notant } x_n=\varphi(n) \end{aligned}$$

  On dit que c'est l'écriture en extension de E. Les x_n sont deux à deux distincts (car φ est une bijection).
- On peut donc attribuer à chaque élément x de E un numéro (entier positif) de sorte que deux éléments différents aient des numéros différents.
- Il y a toujours plusieurs choix possibles pour effectuer cette numérotation.
- Lorsque E est fini et $\mathrm{card}(E)=n$, on note de manière analogue :

$$E=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$$

avec $x_1, \ldots, x_n$ deux à deux distincts (car $\operatorname{card} E = n$). C'est l'écriture en extention de E.
$\square$

Proposition 4 – Les ensembles dénombrables usuels

Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$ sont dénombrables.
L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable (non mentionné dans le programme).

Proposition 5 – Opérations avec les ensembles dénombrables

(1) *Si A et B sont dénombrables, alors leur produit cartésien*

$$A \times B = \big\{(x, y) \mid x \in A \text{ et } y \in B\big\}$$

est dénombrable.
(2) *Si A et B sont dénombrables, alors leur réunion $A \cup B$ est dénombrable.*
(3) *Si A est dénombrable et $B \subset A$, alors B est au plus dénombrable.*

On a plus généralement les résultats suivants :
(4) *Si $A_1, \ldots, A_n$ sont dénombrables, alors $A_1 \times \cdots \times A_n$ est dénombrable.*
(5) *Si $A_1, \ldots, A_n$ sont dénombrables, alors $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ est dénombrable.*
(6) *Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n est un ensemble dénombrable, alors $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ est dénombrable.*

Proposition 6 – Des ensembles non dénombrables

Les résultats suivants ne sont pas mentionnés dans le programme :
(1) *L'ensemble Ω des suites à valeurs dans $\{0, 1\}$*

$$\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \{(u_n)_{n \geqslant 0} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0 \text{ ou } u_n = 1\}$$

n'est pas dénombrable.
(2) *L'intervalle $[0, 1[$ n'est pas dénombrable.*
(3) *Tout intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point n'est pas dénombrable.*
(4) *Les ensembles $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ ne sont pas dénombrables.*

2 Familles sommables

Définition 7 – Famille sommable

- *Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels, on dit qu'elle est sommable lorsque la série $\sum x_n$ converge absolument.*
- *Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs, on convient que l'on peut toujours définir sa somme :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$$

qui appartient à $\overline{\mathbb{R}}^+ = [0, +\infty] = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

Remarques.

- Pour une série $\sum x_n$ à termes positifs, on a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = +\infty \iff \sum x_n \text{ diverge}$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n < +\infty \iff \sum x_n \text{ converge}$$

- Pour une série $\sum x_n$ à termes quelconques :

$$(x_n) \text{ est sommable} \iff \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| < +\infty$$ □

Remarque. Une conséquence. Soit A un ensemble dénombrable de nombres réels ou complexes que l'on note en extension :

$$A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

On suppose que $\sum |x_n| < +\infty$, autrement dit que la série $\sum x_n$ converge absolument. Alors :

- On peut définir la somme des éléments de A :

$$\sum_{x \in A} x = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$$

  Cette somme est finie.
- Cette somme est indépendante du choix que l'on a fait pour ordonner les éléments de A.
- On a les propriétés usuelles linéarité, positivité et croissance pour les calculs de somme.
- On a également la propriété suivante : si $A = A_1 \cup A_2$ avec $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, alors :

$$\sum_{x \in A} x = \sum_{x \in A_1} x + \sum_{x \in A_2} x$$ □

Théorème 8 – de Fubini

(1) *Si $(x_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ est une famille de nombres réels positifs, on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} x_{nk}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x_{nk}\right)$$

avec la convention que les sommes sont infinies lorsque l'un des séries diverge.

(2) *Si $(x_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ est une famille de nombres réels telle que $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} |x_{nk}|\right) < +\infty$ alors :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} x_{nk}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x_{nk}\right)$$

3 Tribus sur un ensemble

Définition 9 – Tribu sur un ensemble et espace probabilisable

Soit Ω un ensemble. On dit que $\mathscr{T} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :

(1) $\Omega \in \mathscr{T}$;

(2) $\forall A \in \mathscr{T}, \overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathscr{T}$;

(3) Pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ *d'éléments de* $\mathscr{T}$, $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_i \in \mathscr{T}$.

L'ensemble Ω est appelé univers, les éléments de $\mathscr{T}$ sont appelés évènements.
On appelle espace probabilisable tout couple $(\Omega, \mathscr{T})$ où Ω est un ensemble non vide et $\mathscr{T}$ est une tribu sur Ω.

Proposition 10 – Avec les mêmes notations, on a également

(1) $\emptyset \in \mathscr{T}$;

(2) Pour tout suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ *d'éléments de* $\mathscr{T}$, $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_i \in \mathscr{T}$;

(3) Quels que soient A et B éléments de $\mathscr{T}$, $A \cup B$, $A \cap B$ et $A \setminus B$ sont des éléments de $\mathscr{T}$.

Remarque. On dit que $\emptyset$ est l'évènement impossible et que Ω est l'évènement certain. □

Remarques.

- L'évènement $A \cup B$ est réalisé ssi A est réalisé ou B est réalisé.
- L'évènement $A \cap B$ est réalisé ssi A et B sont simultanément réalisés.
- L'évènement $A \setminus B$ est réalisé ssi A est réalisé et simultanément B n'est pas réalisé.
- L'évènement $\bigcup_{n\geqslant 0} A_n$ est réalisé ssi l'un des évènements A_n est réalisé.
- L'évènement $\bigcap_{n\geqslant 0} A_n$ est réalisé ssi tous les évènements A_n sont simultanément réalisés.
- La propriété $A \subset B$ signifie que, à chaque fois que A est réalisé, B l'est également. Autrement dit : la réalisation de A entraine (implique) celle de B. □

4 Ce qu'il faut retenir

◇ On utilisera essentiellement les points suivants.

- Si E est un ensemble dénombrable, on peut l'écrire sous la forme $E = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ avec les x_n deux à deux distincts.
- Pour une suite (x_n) à valeurs positives, on peut toujours définir la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$$

en convenant qu'elle vaut $+\infty$ lorsque la série est divergente. On a alors :

$$\sum x_n \text{ converge} \iff \sum_{n=0}^{+\infty} x_n < +\infty$$

- Si on dispose de réels positifs a_{ij} pour $i, j \in \mathbb{N}$, alors :

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} a_{ij}\right) = \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_{ij}\right)$$

en convenant que ces quantités valent $+\infty$ en cas de divergence.
- Si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'évènements, alors on peut définir les évènements :

$$B = \bigcup_{n\geqslant 0} A_n \quad \text{(réunion infinie des } A_n\text{)}$$
$$C = \bigcap_{n\geqslant 0} A_n \quad \text{(intersection infinie des } A_n\text{)}$$

L'évènement B est réalisé si, et seulement si, l'un au moins des évènements A_n est réalisé (*i.e.* : il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que A_n est réalisé). L'évènement C est réalisé si, et seulement si, chaque évènement A_n est réalisé (*i.e.* : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, A_n est réalisé).

III. Espaces probabilisés

IV. Conditionnement et indépendance

Définition 11 – Probabilité conditionnelle

Soient A et B deux évènements avec $\mathbf{P}(B) > 0$. On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le réel noté $\mathbf{P}_B(A)$ ou $\mathbf{P}(A|B)$ défini par :

$$\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}(B \cap A)}{\mathbf{P}(B)}$$

L'application $\mathbf{P}_B$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{T})$ appelée probabilité conditionnelle relativement à B.

Remarque. On utilise très souvent la relation $\mathbf{P}(B \cap A) = \mathbf{P}_B(A)\mathbf{P}(B)$. On convient même qu'elle reste vraie si $\mathbf{P}(B) = 0$ puisque dans ce cas $\mathbf{P}(B \cap A) = 0$. □

Remarque. On rencontre aussi les notations $\mathbf{P}^B(A)$, $\mathbf{P}(A|B)$ et $\mathbf{P}(A/B)$ pour $\mathbf{P}_B(A)$. La notation $\mathbf{P}_B(A)$ traduit le fait que $\mathbf{P}_B$ est une nouvelle loi de probabilités. La notation $\mathbf{P}(A|B)$ correspond à la formulation « probabilité de A sachant B. » Attention : $A|B$ n'a pas de signification propre (ce n'est pas un évènement). □

Théorème 12 – Formule des probabilités composées

Si $A_1, \dots, A_n$ dont des évènements et $\mathbf{P}(A_1), \mathbf{P}(A_1 \cap A_2), \dots, \mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$ sont non nuls, alors :

$$\mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(A_2)\mathbf{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots \mathbf{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Remarque. Sachant que $\mathbf{P}(A_1) \geqslant \mathbf{P}(A_1 \cap A_2) \geqslant \cdots \geqslant \mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$, il suffit en fait que cette dernière probabilité soit non nulle. □

Définition 13 – Système complet d'évènements, système quasi-complet

- *On dit qu'une famille finie $(A_1, \ldots, A_n)$ est un système complet (fini) d'évènements lorsque les A_i sont deux à deux incompatibles et*

$$A_1 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$$

- *On dit qu'une famille finie $(A_1, \ldots, A_n)$ est un système quasi-complet (fini) d'évènements lorsque les A_i sont deux à deux incompatibles et*

$$\mathbf{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = 1$$

- *On dit qu'une suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'évènements est un système complet (dénombrable) d'évènements lorsque les A_i sont deux à deux incompatibles et*

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_i = \Omega$$

- *On dit qu'une suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'évènements est un système quasi-complet (dénombrable) d'évènements lorsque les A_i sont deux à deux incompatibles et*

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_i\right) = \Omega$$

Remarque. Tout système comlet d'évènements est donc quasi-complet. □

Théorème 14 – Formule des probabilités totales

- *Si B est un évènement et $(A_1, \ldots, A_n)$ est un système fini complet ou quasi-complet d'évènements alors :*

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k)\mathbf{P}_{A_k}(B)$$

- *Si B est un évènement et $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est un système dénombrable complet ou quasi-complet d'évènements alors :*

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)\mathbf{P}_{A_n}(B)$$

(Dans les deux cas, on convient que $\mathbf{P}(A_k)\mathbf{P}_{A_k}(B) = 0$ lorsque $\mathbf{P}(A_k) = 0$.)

Théorème 15 – Formules de Bayes

Si A et B sont deux évènements tels que $\mathbf{P}(A) > 0$ *et* $\mathbf{P}(B) > 0$*, alors :*

$$\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}_A(B)\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)}$$

Remarque. En pratique, le dénominateur $\mathbf{P}(B)$ est souvent obtenu à l'aide de probabilités conditionnelles par la formule des probabilités totales, par exemple :

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}_A(B) + \mathbf{P}(\overline{A})\mathbf{P}_{\overline{A}}(B)$$

ou si on dispose d'un système complet d'évènements $(A_1, \dots, A_n)$:

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}_{A_i}(B)$$ □

Définition 16 – Indépendance

Deux évènements A et B sont dits indépendants (en probabilité, relativement à $\mathbf{P}$*) lorsque* $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

⚠***Remarque.*** La notion d'indépendance de deux évènements dépend de la probabilité choisie (contrairement à la propriété d'être incompatibles). □

Proposition 17 – Caractérisation de l'indépendance

Si A et B sont deux évènements et $\mathbf{P}(A) \neq 0$*, on a équivalence entre :*

(i) *A et B sont indépendants ;*

(ii) $\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B)$.

Définition 18 – Indépendance pour n évènements

Soient $A_1, \dots, A_n$ des évènements. On dit que $A_1, \dots, A_n$ sont :

- *Indépendants deux à deux lorsque, pour $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$, on a* $\mathbf{P}(A_i \cap A_j) = \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(A_j)$ *;*
- *Indépendants lorsque, pour $I \subset [\![1, n]\!]$ avec $I \neq \emptyset$, on a :*

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbf{P}(A_i)$$

⚠***Remarque.*** Des évènement indépendants sont indépendants deux à deux. La réciproque est fausse. □

Les résultats à connaitre

- Tribu sur un ensemble.
- Opérations sur les évènements.
- Probabilité.
- Évènement presque sûr, évènement négligeable.
- Opérations avec les probabilités ; cas des limites de suites monotones d'évènements.
- Probabilité conditionnelle.
- Formule des probabilités composées.
- Système complet d'évènements ; système quasi complet.
- Formule des probabilités totales.
- Formules de Bayes (savoir redémontrer la formule).
- Indépendance de deux évènements.
- Caractérisation avec la probabilité conditionnelle.
- Indépendance 2 à 2 et indépendance pour n évènements (lien entre ces deux notions).

Quelques objectifs du chapitre

- Savoir faire le lien entre le vocabulaire probabiliste et le vocabulaire ensembliste (en particulier, savoir décrire des évènements au moyen des opérations ensemblistes et réciproquement).
- Savoir proposer une modélisation pour un problème probabiliste.
- Savoir manipuler les probabilités conditionnelles.

En pratique

▸ Comment utiliser les opérations ensemblistes ?

Avant tout, il est intéressant de mettre en évidence des évènements simples ou élémentaires dont on peut déterminer la probabilité et qui permettront d'écrire les autres évènements en utilisant les opérations :

- $\cap$ correspond à la conjonction (*et*) ;
- $\cup$ correspond à la disjonction (*ou*) ;
- Le complémentaire correspond à la négation.

On a également des intersections et des réunions infinies :

- $\bigcap_{n \geqslant p} A_n$ signifie que pour tout $n \geqslant p$, l'évènement A_n est vrai ;
- $\bigcup_{n \geqslant p} A_n$ signifie qu'il existe $n \geqslant p$ tel que l'évènement A_n est vrai.

▸ Quelles opérations peut-on effectuer avec les probabilités ?

Pour deux évènements A et B :

- Les résultats suivants sont toujours vrais :

$$\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$$
$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$$

et aussi $\mathbf{P}(A \setminus B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B)$;
- Si A et B sont incompatibles ($A \cap B = \emptyset$), alors $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$;
- Si A et B sont indépendants, alors $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$;
- Si $B \subset A$, alors $\mathbf{P}(A \setminus B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(B)$.

Pour l'intersection d'une famille finie $(A_1, \ldots, A_n)$ d'évènements :
- On a toujours la formule des probablités composées :

$$\mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(A_2)\mathbf{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots \mathbf{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

(si $\mathbf{P}(A_1), \mathbf{P}(A_1 \cap A_2), \ldots, \mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$ sont non nuls) ;
- Si $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellements indépendants, alors $\mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1) \cdots \mathbf{P}(A_n)$.

Pour une suite $(A_n)_{n \geqslant 0}$ d'évènements :
- Si les A_n sont deux à deux disjoints, alors $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)$;
- Si la suite (A_n) est croissante (pour tout n, $A_n \subset A_{n+1}$), alors $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}(A_n)$;
- Si la suite (A_n) est décroissante (pour tout n, $A_{n+1} \subset A_n$), alors $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}(A_n)$.

▸ Comment utiliser les probabilités conditionnelles ?

- Parfois l'énoncé permet d'obtenir plus naturellement $\mathbf{P}_A(B)$ que $\mathbf{P}(B)$ (on peut alors obtenir $\mathbf{P}(A \cap B)$ avec $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(B|A)\mathbf{P}(A)$).
- Si on connait les $\mathbf{P}(B|A_i)$ et $A_1, \ldots, A_n$ est un système complet d'évènements, alors on peut retrouver $\mathbf{P}(B)$ par la formule des probabilités totales.
- On peut utiliser la formule des probabilités composées pour obtenir la probabilité d'une intersection (cf. opérations sur les probabilités).
- La formule de Bayes permet d'inverser le conditionnement (*i.e.* obtenir des probabilités de la forme $\mathbf{P}(A_i|B_j)$ à partir de probabilités du type $\mathbf{P}(B_j|A_i)$).

▸ Comment utiliser l'indépendance ?

On l'utilise souvent pour calculer la probabilité d'une intersection (il faut avoir l'indépendance mutuelle des évènements, c'est souvent implicite dans l'énoncé des exercices).

Illustrations du cours

Exercice 1 *Vocabulaire sur les évènements.* On lance indéfiniment une pièce. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note P_n l'évènement « le n-ième tirage a amené pile. » Exprimer à l'aide des opérations ensemblistes les évènements :

(a) A : « les deux premiers lancers ont donné le même résultat, mais pas le troisième » ;
(b) B : « on n'a jamais obtenu pile durant les cinq premiers tirages » ;
(c) C : « on n'a jamais obtenu face » ;
(d) D : « à partir du tirage numéro 10, on n'a plus obtenu que pile ».

Quelle est la signification des évènements $E = \bigcup_{n=0}^{+\infty} P_n$ et $F = \bigcap_{n=0}^{+\infty} P_n$?

Exercice 2 *Définition d'une probabilité.* Montrer que l'on peut définir une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}(\{n\}) = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{n!}$$

Déterminer alors la probabilité de l'évènement $\{2p \mid p \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 3 *Probabilités et opérations (1).* Soit n un entier strictement supérieur à 3 ; n personnes jouent à pile ou face avec une pièce équilibrée et de façon indépendante. L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ que l'on précisera. Quelle est la probabilité qu'une personne exactement obtienne un résultat différent des $n-1$ autres personnes (évènement noté A) ?

Exercice 4 *Formule des probabilités totales (1), formule de Bayes.* Une urne U_1 (respectivement U_2) contient n_1 (respectivement n_2) boules noires et b_1 (respectivement b_2) boules blanches.

(a) On choisit au hasard l'une des deux urnes puis l'on tire une boule dans cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire ?
(b) On réalise la même expérience et on a obtenu une boule noire. Quelle est la probabilité que le tirage ait été effectué dans l'urne 1 ?

Exercice 5 *Formule des probabilités totales (2).* On consdère une pièce qui amène *pile* avec la probabilité $p \in]0,1[$. On lance cette pièce. Si *pile* apparait pour la première fois au n-ième lancer, on tire aléatoirement un nombre x entier compris entre 1 et n. On considère :

- pour $n \in \mathbb{N}^*$ l'évènement A_n : « *pile* apparait pour la première fois au n-ième lancer ; »
- pour $k \in \mathbb{N}^*$ l'évènement X_k : « le nombre aléatoire x tiré est égal à k ; »
- l'évènement B : « *pile* n'apparait jamais. »

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbf{P}(A_n)$ puis démontrer que $\mathbf{P}(B) = 0$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer une expression de $\mathbf{P}(X_k)$ puis comparer $\mathbf{P}(X_k)$ et $\mathbf{P}(X_{k+1})$.

Exercice 6 *Formule des probabilités composées, formule de Bayes*. Une urne contient n boules noires et b boules blanches. On réalise k tirages en remettant dans l'urne la boule tirée si elle est noire et en ne la remettant pas si elle est blanche.

(a) Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit blanche et toutes les autres noires ?

(b) Quelle est la probabilité que la deuxième boule tirée soit blanche et toutes les autres noires ?

(c) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une boule blanche durant les k tirages ?

(d) On suppose que la deuxième boule tirée est noire. Quelle est la probabilité que la première ait été blanche ?

Exercice 7 *Indépendance*. On considère 2 urnes : l'urne 1 contient deux boules blanches et une boule noire, l'urne 2 contient une boule blanche et deux noires. On choisit une urne au hasard et on tire deux boules, successivement et avec remise. On note B_1 (respectivement B_2) la probabilité d'obtenir une boule blanche au premier (respectivement second) tirage. Déterminer les probabilités des évènements B_1, B_2 et $B_1 \cap B_2$. Commenter.

Exercice 8 *Probabilités et opérations (2)*. On considère une suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'évènements. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les évènements $A_0, A_1, \dots, A_n$ sont indépendants. Démontrer que :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\geqslant 0} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_0)\mathbf{P}(A_1)\cdots\mathbf{P}(A_n)$$