Polynômes en algèbre linéaire

Notations : E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$; n est un entier naturel. On rappelle que pour $f \in \mathscr{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$f^0 = \mathrm{id}_E, \quad f^1 = f \quad \text{et} \quad f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ termes}}$$

□

I. Détour par les projecteurs et symétries

Rappel 1 – Projecteur

(1) *Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E (noté $E = F \oplus G$), alors par définition :*

$$\forall x \in E,\ \exists!(x_F, x_G) \in F \times G,\ x = x_F + x_G$$

Avec les mêmes notations, l'application

$$p : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & x_F \end{array}$$

est appelée le projecteur sur F parallèlement à G. C'est un endomorphisme de E ;

(2) *Si E est de dimension finie, $(e_1, \ldots, e_r)$ est une base de F et $(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ est une base de G, alors $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

(3) *Si p est le projecteur sur F parallèlement à G, alors $p \circ p = p$ ce que l'on note aussi $p^2 = p$.*

(4) *Réciproquement, si p est un endomorphisme de E et si $p^2 = p$, alors p est un projecteur de E. C'est le projecteur sur* $\mathrm{Im}(p)$ *parallèlement à* $\mathrm{Ker}(p)$ *et on a de plus* $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id})$.

Rappel 2 – Symétrie

(1) Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E (noté $E = F \oplus G$), alors par définition :

$$\forall x \in E,\ \exists!(x_F, x_G) \in F \times G,\ x = x_F + x_G$$

Avec les mêmes notations, l'application

$$s : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x_F - x_G \end{array}$$

est appelée la symétrié par rapport à F parallèlement à (ou dans la direction de) G. C'est un endomorphisme de E ;

(2) Si E est de dimension finie, $(e_1, \ldots, e_r)$ est une base de F et $(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ est une base de G, alors $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{I}_{n-r} \end{array}\right)$$

(3) Si s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G, alors $s \circ s = \mathrm{id}_E$ ce que l'on note aussi $s^2 = \mathrm{id}_E$.

(4) Réciproquement, si s est un endomorphisme de E et si $s^2 = \mathrm{id}_E$, alors s est une symétrie de E. C'est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id})$.

Corollaire 3 – Où l'on voit des polynômes annulateurs et des matrices diagonales

Soient E de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. On a les résultats suivants :

(1) Si $f^2 = f$, alors $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(f)$ et si $\mathscr{B}$ est une base de E adaptée à cette décomposition, alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \quad \textit{avec } r = \dim \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$$

(2) Si $f^2 = \mathrm{id}$, alors $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id})$ et si $\mathscr{B}$ est une base de E adaptée à cette décomposition, alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{I}_{n-r} \end{array}\right) \quad \textit{avec } r = \dim \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$$

Dans le cas (1), $X^2 - X$ est annulateur de f et $X^2 - X = X(X-1)$. Dans le cas (2), $X^2 - 1$ est annulateur de f et $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$.

II. Polynômes d'endomorphismes, de matrices carrées

Définition 4 – Polynôme d'endomorphisme, de matrice carrée

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ *noté sous la forme* $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ *avec* $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{K}$.

- *Pour* $f \in \mathscr{L}(E)$, *on définit :*

$$P(f) = \sum_{k=0}^{m} a_k f^k = a_m f^m + \cdots + a_2 f^2 + a_1 f + a_0 \operatorname{id}_E$$

- *Pour* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, *on définit :*

$$P(A) = \sum_{k=0}^{m} a_k A^k = a_m A^m + \cdots + a_2 A^2 + a_1 A + a_0 \mathrm{I}_n$$

Proposition 5 – Règles de calcul

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$. *On a les résultats suivants.*

- *Pour* $f \in \mathscr{L}(E)$, $(\lambda P + Q)(f) = \lambda P(f) + Q(f)$ *et* $(P \times Q)(f) = P(f) \circ Q(f)$.
- *Pour* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $(\lambda P + Q)(A) = \lambda P(A) + Q(A)$ *et* $(P \times Q)(A) = P(A) \times Q(A)$.

Remarque. Si $A = Q^{-1}BQ$ avec $A, B, Q \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et Q inversible, alors $P(A) = Q^{-1}P(B)Q$. □

Remarque. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. L'application :

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{K}[X] & \to & \mathscr{L}(E) \\ P & \mapsto & P(f) \end{array}$$

est une application linéaire. □

Corollaire 6 – Commutativité

Avec les mêmes notations :

- *Pour* $f \in \mathscr{L}(E)$, $P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f)$.
- *Pour* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $P(A) \times Q(A) = Q(A) \times P(A)$.

Remarque. Si $f \in \mathscr{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, alors f et $P(f)$ commutent. □

Définition 7 – Polynôme annulateur

- *Pour* $f \in \mathscr{L}(E)$, *on appelle polynôme annulateur de* f *tout polynôme* $P \in \mathbb{K}[X]$ *tel que* $P(f) = 0$.
- *Pour* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, *on appelle polynôme annulateur de* A *tout polynôme* $P \in \mathbb{K}[X]$ *tel que* $P(A) = 0$.

III. Interpolation de Lagrange

IV. Déterminant de Vandermonde

Les résultats à connaitre

- Polynôme appliqué à un endomorphisme, à une matrice carrée.
- Polynôme annulateur.
- Régles de calcul, $P(M)$ et $Q(M)$ commutent, M et $P(M)$ commutent.
- Base des polynômes d'interpolation. Écriture d'un polynôme dans cette base. Interpolation.
- Déterminant de Vandermonde.

En pratique

▸ Comment utiliser des polynômes d'endomorphismes ?

Si $f \in \mathscr{L}(E)$ et P est un polynôme, alors $P(f)$ commute avec f. Souvent, on veut démontrer que le commutant de f :

$$\mathscr{C} = \{g \in \mathscr{L}(E) \mid fg = gf\}$$

n'est constitué que des polynômes de f.

▸ Comment obtenir un polynôme annulateur ?

Pour déterminer un polynôme annulateur de $f \in \mathscr{L}(E)$:

- Utiliser les propriétés de f (projecteur, symétrie, informations sur les puissances de f) ;
- De manière générale, si E est de dimension n, $f \in \mathscr{L}(E)$ possède au moins un polynôme annulateur non nul car la famille $(\mathrm{id}, f, \dots, f^{n^2})$ est de cardinal n^2+1 et $\mathscr{L}(E)$ est de dimension n^2, cette famille est donc nécessairement liée ;
- Plus généralement, poyr expliciter un polynôme annulateur de f, on peut chercher s'il existe un entier k et des coefficients $a_0, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{K}$ tels que :

  $$f^k = a_{k-1} f^{k-1} + \cdots + a_1 f + a_0 \,\mathrm{id}$$

  Alors, $P = X^k - a_{k-1}X^{k-1} - \cdots - a_1 X - a_0$ est annuleur de f.
- On disposera dans un chapitre ultérieur du résultat suivant : si E est de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$, alors il existe un polynôme annulateur de f de degré n (mais il peut exister aussi des polynômes annulateurs non nuls de degré strictement inférieur à n).

▸ Comment utiliser un polynôme annulateur ?

Un polynôme P non nul annulateur de $f \in \mathscr{L}(E)$ permet :

- De calculer les puissances de f si on connait toutes les racines de P (dans $\mathbb{C}$) avec leur multiplicité ;
- De calculer f^{-1} si $P(0) \neq 0$.

Plus tard, un tel polynôme permettra d'obtenir les valeurs propres de f.

▸ Comment utiliser l'interpolation de Lagrange ?

Si on dispose d'abscisses $x_0, \dots, x_n$ deux à deux distinctes et d'ordonnées $y_0, \dots, y_n$ alors :

- Il existe un polynôme P tel que $P(x_0) = y_0, P(x_1) = y_1, \dots, P(x_n) = y_n$.

- Il existe un unique polynôme P appartenant à $\mathbb{K}_n[X]$ qui vérifie cette condition.
- Ce polynôme P s'écrit :

$$P = y_0 L_0 + y_1 L_1 + \cdots + y_n L_n \quad \text{avec pour } i \in [\![0, n]\!] : \quad L_i = \prod_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \neq i}} \frac{X - x_i}{x_k - x_i}$$

▸ *** Propriétés à retenir

- Une matrice carrée M *strictement* triangulaire supérieure (ou inférieure) est nilpotente ce qui signifie qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $M^p = 0$. Il en est de même de l'endomorphisme canoniquement associé à une telle matrice ;
- Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\operatorname{rg} M \leqslant 1$, alors il existe $X, Y \in \mathbb{K}^n$ telles que $M = XY^\top$ et si on note t la somme des coefficients diagonaux de M, alors $M^2 = tM$ (le polynôme $X^2 - tX$ est annulateur de M) ;
- Si $f \in \mathscr{L}(E)$ avec E de dimension n, $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$ et si $x_0 \in E$ est tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$, alors :

$$\mathscr{B} = (x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$$

  est une base de E.

Illustrations du cours

Exercice 1 *Exemples de polynômes annulateurs.*

(a) Déterminer un polynôme annulateur d'un projecteur p de E.

(b) Déterminer un polynôme annulateur d'une symétrie s de E.

(c) Déterminer un polynôme annulateur de $\lambda\,\mathrm{id}_E$.

(d) Déterminer un polynôme annulateur d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent.

(e) Déterminer un polynôme annulateur d'une matrice diagonale $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

(f) Déterminer un polynôme annulateur d'une matrice diagonale par blocs $\begin{pmatrix} A & (0) \\ (0) & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, connaissant un polynôme annulateur P de A.

Exercice 2 *Polynôme annulateur pour le calcul de A^{-1}.* Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer un polynôme annulateur de A, de degré 3.

(b) Démontrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 3 *Polynôme annulateur pour le calcul de A^k.* On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$, canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2.

(b) Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer A^k.

(c) Démontrer que $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}) = \mathbb{R}^3$.

Exercice 4 *Une interpolation.* Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(1) = 2$, $P(2) = 2$ et $P(3) = -1$. On l'écrira comme une combinaison linéaire de la famille des polynômes d'interpolation de Lagrange.

Exercice 5 *Une application de l'interpolation.* On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Démontrer que pour toute matrice diagonale $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$, il existe un polynôme P tel que $B = P(A)$.

Exercice 6 *Utiliser un déterminant de Vandermonde.* Soient $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on définit :

$$f_k : t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(z_k t)$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(z_1, \ldots, z_n)$ pour que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ soit libre.

Exercice ✎ *À faire vous-même pour voir si vous avez compris.* Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2.

(b) À l'aide de ce polynôme, justifier que la matrice A est inversible et exprimer A^{-1} comme une combinaison linéaire des matrices A et I_3.

(c) À l'aide de ce polynôme, exprimer pour tout $k \in \mathbb{N}$ la matrice A^k comme une combinaison linéaire des matrices A et I_3.