Intégrales à paramètres

◇ Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, non vides et non réduits à un point et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

◇ Dans ce chapitre, la notation *c.p.m.* signifie « continue par morceaux. »

I. Compléments sur les suites et séries de fonctions

Théorème 1 – Convergence dominée

Soit $(f_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de fonctions définies au moins sur J et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si :

- *Pour tout $n \geqslant n_0$, la fonction f_n est* c.p.m. *sur J ;*
- *La suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant n_0}$ converge simplement sur J vers une fonction f ;*
- *La fonction f est* c.p.m. *sur J ;*
- *Il existe une fonction φ* c.p.m. *et intégrable sur J telle que :*

$$\forall t \in J,\ \forall n \geqslant n_0,\ \left|f_n(t)\right| \leqslant \varphi(t)$$

Alors pour tout $n \geqslant n_0$, la fonction f_n est intégrable sur J, la fonction f est intégrable sur J et :

$$\int_J f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_J f(t)\,\mathrm{d}t$$

ou encore : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_J f_n(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_J \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t.$

Théorème 2 – Échange série intégrale avec convergence dominée

Soit $\sum_{n\geqslant n_0} f_n$ *une série de fonctions définies au moins sur* J*. Si :*

- *Pour tout* $n \geqslant n_0$*, la fonction* f_n *est* c.p.m. *et intégrable sur* J *;*
- *La série* $\sum\limits_{n\geqslant n_0} f_n$ *converge simplement sur* J *;*
- *Sa somme* f *est* c.p.m. *sur* J *;*
- *La série numérique* $\sum\limits_{n\geqslant n_0} \int_J \left|f_n(t)\right| \mathrm{d}t$ *converge,*

alors la fonction f *est intégrable sur* J*, la série (numérique)* $\sum\limits_{n\geqslant n_0} \int_J f_n$ *converge et :*

$$\int_J f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \int_J f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

ou encore : $\displaystyle\int_J \left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(t)\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \left(\int_J f_n(t)\,\mathrm{d}t\right).$

Théorème 3 – de convergence dominée, à paramètre continu

Soient une fonction $f : I \times J \to \mathbb{K}$ *(de deux variables) et* a *une borne de* I *(éventuellement* $a = +\infty$ *ou* $-\infty$*). Si :*

(1) Pour tout $t \in J$*,* $f(x,t) \xrightarrow[x\to a]{} \ell(t)$ *une limite finie;*

(2) Pour tout $x \in I$*, les fonctions* $t \in J \mapsto f(x,t)$ *et* $t \in J \mapsto \ell(t)$ *sont* c.p.m. *sur* J *;*

(3) Il existe une fonction φ c.p.m. *et intégrable sur* J *telle que :*

$$\forall x \in I,\ \forall t \in J,\ \left|f(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$$

alors ℓ *est intégrable sur* J *et :*

$$\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to a]{} \int_J \ell(t)\,\mathrm{d}t$$

ou encore : $\displaystyle\lim_{x\to a}\left(\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_J \left(\lim_{x\to a} f(x,t)\right) \mathrm{d}t.$

II. Continuité et dérivabilité

Rappel 4 – Une caractérisation des fonctions de classe C^k

Soient $f : I \to \mathbb{K}$ *une fonction et* $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$*. On a équivalence entre :*

(i) La fonction f *est de classe* C^k *sur* I *;*

(ii) Pour tout segment $[a,b] \subset I$*, la fonction* f *est de classe* C^k *sur* $[a,b]$*.*

Théorème 5 – Continuité des intégrales à paramètres

Soit une fonction $f : I \times J \to \mathbb{K}$ (de deux variables). Si :

- *$\forall x \in I$, la fonction $t \in J \mapsto f(x,t)$ est* c.p.m. *sur J ;*
- *$\forall t \in J$, la fonction $x \in I \mapsto f(x,t)$ est continue sur I ;*
- *Il existe une fonction $\varphi : J \to \mathbb{R}$* c.p.m. *et intégrable sur J telle que :*

$$\forall x \in I,\ \forall t \in J,\ \left|f(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$$

Alors la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est (définie et) continue sur I.

Théorème 6 – Classe C^1 pour les intégrales à paramètres

Soit une fonction $f : I \times J \to \mathbb{K}$ (de deux variables). Si :

- *$\forall t \in J$, la fonction $x \in I \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur I ;*
- *$\forall x \in I$, les fonctions $t \in J \mapsto f(x,t)$ et $t \in J \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sont* c.p.m. *sur J ;*
- *$\forall x \in I$, la fonction $t \in J \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur J ;*
- *Il existe une fonction $\varphi : J \to \mathbb{R}$* c.p.m. *et intégrable sur J telle que :*

$$\forall x \in I,\ \forall t \in J,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$$

Alors la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est (définie et) de classe C^1 sur I et :

$$\forall x \in I,\ F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Théorème 7 – Extension aux fonctions de classe C^k

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et une fonction $f : I \times J \to \mathbb{K}$ (de deux variables). Si :

- *$\forall t \in J$, la fonction $x \in I \mapsto f(x,t)$ est de classe C^k sur I ;*
- *$\forall x \in I, \forall p \in [\![0,k]\!]$, la fonction $t \in J \mapsto \dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$ est* c.p.m. *sur J ;*
- *$\forall x \in I, \forall p \in [\![0,k-1]\!]$, la fonction $t \in J \mapsto \dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$ est intégrable sur J ;*
- *Il existe une fonction $\varphi : J \to \mathbb{R}$* c.p.m. *et intégrable sur J telle que :*

$$\forall x \in I,\ \forall t \in J,\ \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$$

Alors la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est (définie et) de classe C^k sur I et :

$$\forall x \in I,\ \forall p \in [\![1,k]\!],\ F^{(p)}(x) = \int_J \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Les résultats à connaitre

- Théorème de convergence dominée.
- Théorème de convergence dominée avec paramètre continu.
- Échange série intégrale avec convergence dominée.
- Continuité pour $x \mapsto \int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$.
- Classe C^1 pour $x \mapsto \int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$.
- Classe C^k pour $x \mapsto \int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Quelques objectifs du chapitre

- Savoir établir des propriétés d'une fonction définie par une intégrale dépendant d'un paramètre.

En pratique

▸ Comment déterminer la limite d'une intégrale ?

Pour déterminer la limite d'une intégrale I_n dépendant d'un paramètre (entier) n lorsque $n \to +\infty$, on peut :

- Établir des majorations et minorations pour pouvoir appliquer le théorème d'encadrement ;
- Appliquer le théorème de convergence dominée ;
- Appliquer le théorème d'échange limite intégrale avec convergence uniforme ou convergence normale (ce théorème ne s'applique qu'à des intégrales sur des segments).

Pour déterminer la limite d'une intégrale $I(x)$ dépendant d'un paramètre (réel) x lorsque $x \to a$, on peut :

- Établir des majorations et minorations pour pouvoir appliquer le théorème d'encadrement ;
- Utiliser le théorème de convergence dominée avec paramètre continu.

▸ Comment échanger une série et une intégrale ?

Pour obtenir une égalité de la forme $\displaystyle\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)$ on peut :

- Utiliser le théorème d'échange série intégrale avec convergence uniforme. Pour utiliser ce théorème, il est essentiel que : l'intervalle I considéré soit un segment $I = [a,b]$ et que la convergence de la série soit uniforme (ou normale) ;
- Utiliser le théorème d'échange série intégrale avec convergence dominée. Pour utiliser ce théorème, il est essentiel que la série $\sum \int_I |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

Lorsque ces théorèmes ne s'appliquent pas, on peut utiliser une des méthodes suivantes :

- Considérer les intégrales :

$$I_N = \int_I \sum_{n=0}^{N} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{N}\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

et appliquer le théorème de convergence dominée;

- Écrire l'intégrale I sous la forme :

$$I = \int_I \left(\sum_{n=0}^{N} f_n(t) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(t) \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{N} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t + \underbrace{\int_I \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t}_{=u_N}$$

et montrer que $u_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ (en général par un encadrement).

Dans tous les cas, ne pas oublier de justifier la convergence des intégrales et des séries utilisées.

▸ Comment étudier une fonction définie par une intégrale ?

Appliquer les théorèmes (continuité, caractère C^1) du cours.

▸ Comment déterminer un équivalent d'une intégrale dépendant d'un paramètre ?

On pourra penser aux techniques suivantes :

- Changement de variable, par exemple pour faire sortir le paramètre de l'intégrale;
- Intégration par parties pour écrire l'intégrale sous forme d'une somme de deux termes (le crochet et une autre intégrale) et montrer que l'un des termes (le crochet en général) et prépondérant;
- Découper l'intervalle d'intégration pour mettre en évidence des quantités prépondérantes;
- Décomposer la fonction dans l'intégrale pour mettre en évidence des quantités prépondérantes;
- Deviner l'équivalent et se ramener à un problème de recherche de limite.

Illustrations du cours

Exercice 1 *Le théorème de convergence dominée (1).* Calculer $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{n\sin(x/n)}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 *Le théorème de convergence dominée (2).* Déterminer $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{1}\frac{\mathrm{e}^{-x/n}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 3 *Échange série intégrale.* Soit $a\in\,]-1,1[$. Montrer la convergence de l'intégrale

$$I_a=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{a+t}\,\mathrm{d}t$$

puis montrer que $I_a=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n J_n a^n$ en posant, pour $n\in\mathbb{N}$, $J_n=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{n+1}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4 *Le théorème de convergence dominée (3).* Démontrer que

$$\int_0^{1}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t/x}\,\mathrm{d}t\xrightarrow[x\to0^+]{}0$$

Exercice 5 *Le théorème de continuité.* Démontrer que

$$f:x\mapsto\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^x(1+t)}\,\mathrm{d}t$$

est définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 6 *Le théorème de classe* C^1. Soit

$$f:x\mapsto\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}\sin(xt)}{t}\,\mathrm{d}t$$

Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Calculer $f(x)$.

Exercice 7 *Le théorème de classe* C^k. Justifier l'existence de la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(xt)}{t^2}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Montrer que F est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer F' et F'' et en déduire F.

Exercice ✎ *À faire vous-même pour voir si vous avez compris.* On considère la fonction F définie par la relation :

$$F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

(a) Démontrer que le domaine de définition de F est $[0,+\infty[$.
(b) Démontrer que F est continue sur $[0,+\infty[$.
(c) Démontrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$.
(d) Déterminer la limite de F en $+\infty$.