Intégration

◇ **Introduction.** On rencontre en physique, en sciences industrielles, des transformations qui s'écrivent à l'aide d'intégrales :

$$\mathscr{L} f(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t \quad \text{la transformée de Laplace de } f$$
$$\mathscr{F} f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t \quad \text{la transformée de Fourier de } f$$

Ces expressions sont des fonctions définies à l'aide d'intégrales. On verra plus tard dans l'année des résultats permettant d'étudier de telles fonctions mais la première question à se poser est l'*existence* de ces intégrales. Le principe pour cela est *le même que pour les séries* : se ramener à une intégrale « finie » puis prendre une limite. Quelques exemples :

- L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ présente un problème sur la borne $+\infty$, on considère :

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x = -\mathrm{e}^{-x} + 1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

  donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ existe et vaut 1.

- L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ présente un problème sur la borne 0, on considère :

$$\int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln(t)]_x^1 = \ln(1) - \ln(x) \xrightarrow[x\to0]{} +\infty$$

  donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ n'existe pas.

- L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ présente des problèmes en 0 et $+\infty$, on considère séparément

$$\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

  et il faut étudier l'existence de ces deux intégrales.

⋄ On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point. Une écriture de la forme $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ signifie que a est un réel et que b est soit un réel strictement supérieur à a, soit $b = +\infty$. L'intervalle I s'écrit donc sous l'une des formes suivantes :

— $I = [a, b]$ avec $-\infty < a < b < +\infty$;

— $I = [a, b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$;

— $I =]a, b$ avec $-\infty \leqslant a < b < +\infty$;

— $I =]a, b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

Dans le premier cas, $I = [a, b]$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ a déjà été défini lorsque $f \in \mathrm{C}([a, b])$. On étend cette définition aux autres types d'intervalles et aux fonctions continues par morceaux. Les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Fonctions continues par morceaux

Définition 1 – Subdivision d'un segment

On appelle subdivision d'un segment $[a, b]$ toute famille finie $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ de réels telle que $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$.

Définition 2 – Fonctions continues par morceaux

- *Une application $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ est dite continue par morceaux lorsqu'il existe une subdivision $\sigma : a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ du segment $[a, b]$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, f est continue sur $]a_{i-1}, a_i[$ et admet une limite finie à droite en a_{i-1} et à gauche en a_i.*
- *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite continue par morceaux sur I lorsque pour tout segment $[a, b] \subset I$, la restriction $f|_{[a,b]}$ est continue par morceaux sur $[a, b]$.*

On note $\mathrm{C_m}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

⋄ L'ensemble $\mathrm{C_m}(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et il est stable par produit. On admettra que pour $f \in \mathrm{C_m}([a, b])$, on peut définir $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ de la même manière que ce qui a été fait pour les fonctions continues sur un segment en première année. Les propriétés usuelles sont conservées (linéarité, relation de Chasles, positivité, croissance).

Théorème 3 – Rappel – Fonctions continues, positives et d'intégrale nulle

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si f est continue sur $[a, b]$, positive sur $[a, b]$ et $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors :

$$\forall x \in [a, b],\ f(x) = 0$$

⚠ ***Remarque.*** Le résultat est faux dès que l'une des hypothèses (continue / positive / intégrale nulle) n'est pas satisfaite. □

Théorème 4 – Rappel – Intégrale dépendant de la borne supérieure

Soient $f \in \mathrm{C_m}(I)$ et $a \in I$, on définit

$$F : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

On a les résultats suivants :

(1) Si f est continue sur I, alors F est de classe C^1 sur I et F est la primitive de f sur I qui s'annule en a et en particulier :

$$\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$$

(2) Si f est positive sur I, alors F est croissante sur I.

II. Intégrales généralisées

Définition 5 – Intégrale généralisée (ou impropre)

Soit $f \in \mathrm{C_m}(I)$. On distingue trois cas suivant la forme de l'intervalle I :

- *Si $I = [a, b[$, $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge lorsque :*

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{admet une limite finie } \ell \text{ lorsque } x \to b\ (a \leqslant x < b)$$

  et si c'est le cas, on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \ell = \lim_{x\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$;

- *Si $I =]a, b]$, $-\infty \leqslant a < b < +\infty$, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge lorsque :*

$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{admet une limite finie } \ell \text{ lorsque } x \to a\ (a < x \leqslant b)$$

  et si c'est le cas, on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \ell = \lim_{x\to a} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$;

- *Si $I =]a, b[$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge lorsque :*

$$\text{les deux intégrales } \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ convergent}$$

  pour un $c \in]a, b[$ fixé (dont la valeur n'importe pas). Si c'est le cas, on note :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarques.

- Lorsque $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ne converge pas, on dit qu'elle diverge.
- Lorsque $I =]a,b[$, la convergence de l'intégrale (et sa valeur) est indépendante du choix de c.
- Lorsque I est un segment, $I = [a,b]$, et $f \in \mathrm{C_m}([a,b],\mathbb{K})$, on considère que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est toujours convergente. □

III. Convergence absolue, fonctions intégrables

Remarque. On donne les résultats suivants pour des intégrales sur $]a,b[$ mais il s'appliquent aussi pour les intervalles $[a,b[$, $]a,b]$ (ou même $[a,b]$). □

Définition 6 – Intégrale absolument convergente, fonction intégrable

Soit $f \in \mathrm{C_m}(]a,b[,\mathbb{K})$.

- *On dit que* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *est absolument convergente lorsque* $\displaystyle\int_a^b \left|f(t)\right|\,\mathrm{d}t$ *converge.*
- *On dit que* f *est intégrable sur* I *lorsque l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b \left|f(t)\right|\,\mathrm{d}t$ *converge.*

On note alors $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *(ou même* $\displaystyle\int_I f$*).*

Notation : Si I est un intervalle, on note $\mathrm{L}^1(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions qui sont définies sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$, continues par morceaux sur I et intégrables sur I (ce qui signifie que $\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge). □

Théorème 7 – Convergence absolue implique convergence

Si $f \in \mathrm{C_m}(]a,b[)$ *et* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *est absolument convergente, alors elle est convergente et lorsque c'est le cas :*

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b \left|f(t)\right|\,\mathrm{d}t$$

La réciproque est fausse.

Proposition 8 – Fonctions continues, intégrables, d'intégrale nulle

Soit $f \in \mathrm{C_m}(I)$*. On a les résultats suivants :*

(1) *Si* f *est continue sur* I*, intégrable sur* I *et* $\displaystyle\int_I \left|f(t)\right|\,\mathrm{d}t = 0$ *alors* f *est nulle sur* I*.*

(2) *Si* f *est continue et positive sur* I*, intégrable sur* I *et* $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ *alors :*

$$\forall x \in I,\ f(x) = 0$$

⚠ ***Remarque.*** Le résultat est faux dès que l'une des hypothèses (continue / positive / intégrale nulle) n'est pas satisfaite. ☐

IV. Comparaisons

V. Opérations

Remarque. On donne les résultats suivants pour des intégrales sur $]a,b[$ mais il s'appliquent aussi pour les intervalles $[a,b[$, $]a,b]$ (ou même $[a,b]$). ☐

Proposition 9 – Linéarité

Soient $f,g \in \mathrm{C_m}(]a,b[)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a les résultats suivants :

(1) *Si* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge et* $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ *converge, alors* $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t$ *converge et :*

$$\int_a^b (\lambda f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

(2) *Si* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *diverge* $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ *converge, alors* $\displaystyle\int_a^b (f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t$ *diverge.*

⚠ ***Remarque.*** Si $\displaystyle\int_a^b (f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t$ converge, rien ne permet en général d'écrire

$$\int_a^b (f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

(sauf si l'on sait qu'au moins l'une des deux intégrales est convergente). ☐

Proposition 10 – Positivité et croissance

Soient $f,g \in \mathrm{C_m}(]a,b[)$.

(1) *Si f est positive sur I et* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge, alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ *;*

(2) *Si :* $\forall t\in\,]a,b[,\ f(t)\leqslant g(t)$ *et* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ *convergent, alors*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Proposition 11 – Structure de $\mathrm{L}^1(I,\mathbb{K})$

L'ensemble $\mathrm{L}^1(I,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. En particulier :

- *Si f et g sont intégrables sur I, alors $f+g$ est intégrable sur I ;*
- *Si f est intégrable sur I et $\lambda\in\mathbb{K}$, alors λf est intégrable sur I.*

⚠ ***Remarque.*** Dans le cas général, f et g intégrables sur I n'implique pas que le produit fg est intégrable sur I. □

Proposition 12 – Relation de Chasles

Soient $f \in \mathrm{C_m}(]a,b[)$ et $c \in]a,b[$. Si les intégrales $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes, alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Théorème 13 – Changement de variable

Si $f \in \mathrm{C_m}(]a,b[)$ et $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ est une bijection de classe C^1 alors les intégrales

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

sont de même nature. En cas de convergence, lorsque φ est strictement croissante :

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

et lorsque φ est strictement décroissante :

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$$

Plus généralement : $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\lim_\alpha \varphi}^{\lim_\beta \varphi} f(t)\,\mathrm{d}t.$

Théorème 14 – Intégration par parties

Soient $f,g \in \mathrm{C}^1(]a,b[)$. Si fg admet une limite finie en a et en b, alors les intégrales $\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature et en cas de convergence :

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \lim_b fg - \lim_a fg - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

noté également : $\displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \big[f(t)g(t)\big]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$

Proposition 15 – Fonctions à valeurs complexes

Si $f \in \mathrm{C_m}(]a,b[,\mathbb{C})$, *alors :*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \iff \left(\int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t \text{ et} \int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t \text{ convergent}\right)$$

et, lorsqu'il y a convergence :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t$$

ou, de manière équivalente :

$$\int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) \quad \text{et} \quad \int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Les résultats à connaitre

- Définition d'une intégrale convergente, absolument convergente.
- La convergence absolue implique la convergence.
- Intégrales de référence :

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t,\quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t,\quad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t,\quad \int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t,\quad \int_1^{+\infty} \ln t\,\mathrm{d}t$$

  (savoir traiter des intégrales du type $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_0^1 \ln(1-t)\,\mathrm{d}t$ par changement de variable affine).
- Comparaison pour les fonctions positives.
- Intégration par parties.
- Changement de variable.
- Définition d'une fonction intégrable, somme de deux fonctions intégrables.

Quelques objectifs du chapitre

- Maitriser le vocabulaire : intégrale convergente, fonction intégrable, intégrale absolument convergente.
- Savoir établir la convergence et la divergence d'une intégrale.
- Connaitre les propriétés de $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

En pratique

▸ Comment étudier la nature de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$?

Tout d'abord :

- Étudier la continuité (par morceaux) de f ;
- Déterminer les points où l'intégrale est impropre ;
- Éventuellement : découper l'intervalle de manière à se ramener à des intervalles où une seule borne pose problème.

On se ramène alors à des intégrales de la forme $\int_{[a,b[} f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\int_{]a,b]} f(t)\,\mathrm{d}t$. Pour étudier $\int_{[a,b[} f(t)\,\mathrm{d}t$ on peut appliquer l'une des méthodes suivantes :

- Si f est de signe constant au voisinage de b, établir un équivalent de f en b et/ou comparer avec une fonction de référence ;
- Si f n'est pas de signe constant, établir la convergence absolue en considérant $|f|$ qui est positive ;
- Étudier la limite quand $x \to b$ de $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ (éventuellement avec une intégration par parties, ou un changement de variable) ;
- Utiliser une série (typiquement quand la fonction f présente une partie périodique ou des alternances de signes).

▸ Comment calculer la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$?

Quelques techniques classiques :

- Primitives classiques ;
- Intégration par parties ;
- Changement de variable ;
- Écrire $f(t)$ comme somme d'une série (plus intéressant quand on saura échanger facilement intégrale et somme).

▸ Se ramener à une intégrale de référence par ch. de var. affine

Quelques exemples typiques :

- L'intégrale $\int_0^2 \ln(2-t)\,\mathrm{d}t$ est de même nature que $\int_0^2 \ln(u)\,\mathrm{d}t$ par changement de variable affine $u = 2-t$;
- L'intégrale $\int_1^2 \frac{1}{(2-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est de même nature que $\int_0^1 \frac{1}{u^\alpha}\,\mathrm{d}u$ par changement de variable affine $u = 2-t$.

▸ Quelles sont les propriétés de $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$?

- Si $f \in \mathrm{C}(I)$ et $a \in I$, alors $F : x \in I \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur I, c'est la primitive de f sur I qui s'annule en a et en particulier : $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$;
- Si $f \in \mathrm{C_m}(I)$, f est positive sur I et $a \in I$, alors $F : x \in I \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante sur I ;
- Si $f \in \mathrm{C_m}([a,b[)$ et f est positive sur $[a,b[$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, la fonction $F : x \in [a,b[\mapsto \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur I.

▸ *** À retenir...

- Le fait que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge (intégration par parties).
- Le fait que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge (utilisation de séries).
- La valeur de l'intégrale de Gauss : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

Illustrations du cours

Exercice 1 *Définition d'une intégrale convergente ou divergente.* En revenant à la définition, étudier la nature des intégrales impropres :

$$\int_0^{+\infty} \cos(t)\,\mathrm{d}t, \quad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{\pi/2} \tan(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 2 *Relations de comparaison.* Étudier, suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de l'intégrale :

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 3 *Intégration par parties.* Démontrer la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 4 *Intégration par parties.* Pour $n \in \mathbb{N}$, convergence et calcul de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 5 *Changement de variable affine.* Étudier la nature des intégrale :

$$\int_0^1 \ln(1-t)\,\mathrm{d}t, \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{(t-1)^2}\,\mathrm{d}t, \quad \int_0^1 \frac{1}{(t-1)^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 6 *Changement de variable.* Convergence et calcul de l'intégrale

$$\int_0^1 \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 7 *Fonction intégrables (1).*

(a) Démontrer que si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, alors $g : t \mapsto \cos(t) f(t)$ appartient à $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

(b) Démontrer que si $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est une fonction bornée, alors $g : t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-t^2}$ appartient à $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 8 *Fonctions intégrables (2).*

(a) Démontrer que pour $a, b \in \mathbb{R}$, on a $ab \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$.

(b) Soient $f, g \in \mathrm{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $f^2 \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et $g^2 \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Démontrer que $f \times g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

Exercice ✎ *À faire vous-même pour voir si vous avez compris.* Étudier la nature de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t) - 1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

Vrai/Faux

Dans la suite, α est un paramètre réel.

(1) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^3}, \mathrm{d}t$ converge.

(2) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)} \mathrm{d}t$ converge.

(3) L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t$ converge.

(4) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t$ converge.

(5) L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} \mathrm{d}t$ converge.

(6) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} \mathrm{d}t$ converge.

(7) L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} \mathrm{d}t$ converge.

(8) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} \mathrm{d}t$ converge.

(9) L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)-1}{t^2} \mathrm{d}t$ converge.

(10) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)-1}{t^2} \mathrm{d}t$ converge.

(11) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha t}}{1+t^2} \mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\alpha > 0$.

On considère une fonction continue $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ continue.

(12) Si f possède une limite finie en 0, alors $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

(13) Si f possède une limite infinie en 0, alors $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

(14) Si f possède une limite non nulle en 0, alors $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

(15) Si f possède une limite finie et non nulle en 0, alors $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

(16) Si $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors f tend vers 0 en 0.

(17) Si $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors f admet une limite finie en 0.

(18) Si $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors f ne tend pas vers $+\infty$ ou $-\infty$ en 0.

(19) Si $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge et f admet une limite en 0, alors cette limite est non nulle.

(20) Si $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge et f admet une limite en 0, alors cette limite est infinie.

(21) Si $\displaystyle\frac{1}{t} \underset{t\to 0}{=} \mathrm{o}(f(t))$, alors $\displaystyle\int_0^1 \left|f(t)\right| \mathrm{d}t$ diverge.

On considère une fonction continue $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$.

(22) Si f possède une limite finie en $+\infty$, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

(23) Si f possède une limite infinie en $+\infty$, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

(24) Si f possède une limite non nulle en $+\infty$, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

(25) Si $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors f tend vers 0 en $+\infty$.

(26) Si $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors f admet une limite finie en $+\infty$.

(27) Si $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors f ne tend pas vers $+\infty$ ou $-\infty$ en $+\infty$.

(28) Si $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge et f admet une limite en $+\infty$, alors cette limite est non nulle.

(29) Si $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge et f admet une limite en $+\infty$, alors cette limite est infinie.

(30) Si $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-t}$, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

(31) Si $f(t) \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t}\right)$, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\alpha > 0$.

On considère deux fonctions continues $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ et $g : [a,b[\to \mathbb{R}$.

(32) Si $f(t) \underset{t\to b}{=} \mathrm{o}(g(t))$ et $\displaystyle\int_a^b |g(t)|\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

(33) Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_a^b (f(t)-g(t))\,\mathrm{d}t$ converge alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

(34) Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_a^b |f(t)-g(t)|\,\mathrm{d}t$ converge alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

(35) Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge et $\displaystyle\int_a^b (f(t)-g(t))\,\mathrm{d}t$ converge alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

(36) Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge et $\displaystyle\int_a^b (f(t)-g(t))\,\mathrm{d}t$ diverge alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

(37) Si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

(38) Si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

(39) Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ diverge.

(40) Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

1F2V3V4V5V6F7V8F9V10V11F12V13F14F15V16F17F18F19V20V

21V22F23V24V25F26F27V28F29F30V31F32V33V34V35V36F37V38F39V40F