

Espaces vectoriels normés

♦ E et F sont des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

I. Norme et distance

II. Équivalence des normes

III. Convergence des suites dans un EVN

♦ Dans cette partie, E est un espace vectoriel normé. La norme sur E sera notée $\| \cdot \|$ sauf mention explicite du contraire. On ne suppose pas (dans cette partie) que E est de dimension finie.

Définition 1 – Suite convergente

Soient $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de E et $a \in E$. On dit que (u_n) converge vers a lorsque :

$$\|u_n - a\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

⚠ **Remarque.** Cette notion dépend de la norme choisie sur E . □

Proposition 2 – Indépendance par rapport à des normes équivalentes

Soient (u_n) une suite d'éléments de E , $a \in E$ et N_1 et N_2 deux normes sur E . Si N_1 et N_2 sont équivalentes, alors :

$$N_1(u_n - a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \iff N_2(u_n - a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Remarque. En particulier, si E est de dimension finie, alors la convergence d'une suite et sa limite ne dépendent pas de la norme choisie. On peut alors utiliser des notations comme

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a \quad \text{ou} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a \quad \square$$

Proposition 3 – Unicité de la limite

Soient (u_n) une suite d'éléments de E et $\ell, \ell' \in E$. Si $\|u_n - \ell\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ et $\|u_n - \ell'\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, alors $\ell = \ell'$.

Proposition 4 – Opérations sur les suites convergentes

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes d'éléments de E , de limites respectives ℓ et ℓ' et (λ_n) est une suite convergente d'éléments de $\mathbb{K}$, de limite λ , alors :

- (1) La suite $(u_n + v_n)$ est convergente et a pour limite $\ell + \ell'$;
- (2) La suite $(\lambda_n u_n)$ est convergente et a pour limite $\lambda \ell$.

Proposition 5 – Suite extraites

Soient (u_n) une suite d'éléments de E , $a \in E$ et $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante. Si $\|u_n - a\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, alors $\|u_{\varphi(n)} - a\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Définition 6 – Suite bornée

On dit qu'une suite (u_n) d'éléments de E est bornée lorsque :

$$\exists M \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\| \leq M$$

Remarque. Cette notion dépend de la norme choisie sur E . À nouveau, si deux normes sont équivalentes, une suite est bornée pour l'une si, et seulement si, elle est bornée pour l'autre. □

Proposition 7

Toute suite convergente d'éléments de E est bornée.

IV. Cas des suites en dimension finie

Notations : On considère ici que E est un espace vectoriel normé de dimension finie. Toutes les normées sur E étant équivalentes, la convergence d'une suite et la valeur de sa limite ne dépendent pas de la norme choisie sur E . □

Théorème 8 – Caractérisation de la convergence par les coordonnées

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite à valeurs dans E . Pour $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$u_n = x_n^1 e_1 + \dots + x_n^p e_p$$

On a alors équivalence entre :

- (i) (u_n) est convergente;
- (ii) les suites (x_n^i) sont convergentes dans $\mathbb{K}$.

Lorsque c'est le cas, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^1 \right) e_1 + \dots + \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^p \right) e_p$$

Corollaire 9 – Composition par une application linéaire

Si F est un espace vectoriel normé de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et (u_n) est une suite convergente d'éléments de E , de limite ℓ , alors $(f(u_n))$ est une suite convergente d'éléments de F , de limite $f(\ell)$.

Les résultats à connaître

- Définition d'une norme.
- Distance associée à une norme, propriétés.
- Normes équivalentes et cas de la dimension finie.
- Suite convergente (relativement à une norme).
- Convergence d'une suite en dimension finie indépendante de la norme.
- Opérations sur les suites convergentes : somme, produit dans le cas d'une suite vectorielle et d'une suite scalaire.
- Définition : suite bornée ; toute suite convergente est bornée.
- En dimension finie : caractérisation de la convergence d'une suite par ses coordonnées dans une base.

Quelques objectifs du chapitre

- Savoir démontrer qu'une application est une norme.
- Savoir établir qu'une suite d'éléments de E (espace vectoriel normé de dimension finie) est convergente et déterminer sa limite.
- Connaître la norme $\|f\|_\infty$ pour une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ bornée et savoir comment établir que $\|f - f_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

En pratique

► Comment démontrer que N est une norme sur E ?

On applique simplement la définition :

- (1) Vérifier que l'application N est bien définie sur E (en particulier si N est définie à l'aide d'intégrales ou de séries, vérifier la convergence) ;
- (2) Vérifier que N est bien à valeurs dans $\mathbb{R}^+$;
- (3) Montrer que si $u, v \in E$, alors $N(u + v) \leq N(u) + N(v)$;
- (4) Montrer que si $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $N(\lambda u) \leq |\lambda|N(u)$;
- (5) Montrer que si $u \in E$ et $N(u) = 0$, alors $u = 0$.

Pour le dernier point, on utilise souvent l'un des résultats suivants :

- Si une fonction est continue positive et d'intégrale nulle sur un intervalle I , alors elle est nulle sur I ;
- Si une somme de termes positifs est nulle, alors chacun des termes est nul ;
- Si une série à termes positifs est convergente et sa somme est nulle, alors chacun des termes est nul.

Une autre méthode consiste à reconnaître la norme associée à un produit scalaire (lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

► Quelles sont les normes « usuelles » ?

- Sur l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$, on utilise habituellement les normes suivantes :

$$\|u\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n| \text{ en posant } u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\|u\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$$

$$\|u\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

- Sur l'espace vectoriel $C([a, b])$ les normes usuelles sont :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| \, dt$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 \, dt}$$

$$\|f\|_\infty = \max_{t \in [a, b]} |f(t)|$$

- Dans le cas où l'intervalle I n'est pas un segment, on définit les espaces vectoriels $L^1(I) \cap C(I)$ et $L^2(I) \cap C(I)$ munis des normes :

$$\forall f \in L^1(I) \cap C(I), \|f\|_1 = \int_I |f(t)| \, dt$$

$$\forall f \in L^2(I) \cap C(I), \|f\|_2 = \sqrt{\int_I |f(t)|^2 \, dt}$$

- Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on rencontre les normes suivantes :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|A\|_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \text{ en notant } A = (a_{ij})_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$$

$$\|A\|_\infty = \max\{|a_{ij}| \mid i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$$

On a montré que pour deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2$.

- Sur un espace des polynômes, on utilise des normes définies à l'aide des coefficients, par exemple :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \|P\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \text{ en notant } P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$$

$$\|P\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2}$$

ou des normes définies en considérant la fonction polynomiale associée, par exemple :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \|P\|_1 = \int_0^1 |P(t)| \, dt$$

$$\|P\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |P(t)|^2 \, dt}$$

$$\|P\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |P(t)|$$

On peut choisir de travailler sur un segment $[a, b]$ avec $a < b$ plutôt que sur le segment $[0, 1]$.

► **Comment démontrer que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$?**

Ici, (u_n) est une suite d'éléments d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors :

- Soit on montre que dans une base donnée, la i -ème coordonnée de u_n tend vers la i -ème coordonnée de ℓ ,
- Soit on choisit une norme N sur E et on montre que $N(u_n - \ell) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ (par exemple en majorant $N(u_n - \ell)$ par une suite réelle qui converge vers 0),
- Soit on utilise les opérations (par exemple si (u_n) est une somme de deux suites convergentes, ou une combinaison linéaire de suites convergentes).

► **Comment démontrer que $\|u_n - \ell\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$?**

Ici, E est un espace de fonctions définies sur un intervalle I et muni de la norme ∞ sur I . Alors u_n et ℓ sont des fonctions et il faut établir que $\|u_n - \ell\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Pour cela, on trouve une majoration de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |u_n(x) - \ell(x)| \leq \alpha_n$$

où α_n est indépendant de x et $\alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. On aura alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n - \ell\|_\infty \leq \alpha_n$$

et par majoration $\|u_n - \ell\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Illustrations du cours

Exercice 1 Une norme sur $\mathbb{K}^n$. Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} N_\infty : \mathbb{K}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &\mapsto |x_1| + \cdots + |x_n| \end{aligned}$$

est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2 Une norme sur $C([a, b], \mathbb{R})$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} N_1 : C([a, b], \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \end{aligned}$$

est une norme sur $C([a, b], \mathbb{R})$.

Exercice 3 Une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} N_2 : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ A = (a_{ij}) &\mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2} \end{aligned}$$

est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), N_2(AB) \leq N_2(A)N_2(B)$$

Exercice 4 Une norme sur $\mathbb{K}_n[X]$. Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ distincts. On définit l'application :

$$\begin{aligned} N : \mathbb{K}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\mapsto \sum_{k=0}^n |P(a_k)| \end{aligned}$$

Démontrer que N est une norme sur $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 5 Comparaison de normes sur $\mathbb{K}^n$. Montrer qu'il existe des constantes A, B, C strictement positives telles que :

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathbb{K}^n, \|u\|_1 &\leq A \|u\|_2 \\ \|u\|_2 &\leq B \|u\|_\infty \\ \|u\|_\infty &\leq C \|u\|_1 \end{aligned}$$

Exercice 6 *Comparaison de normes sur $C([a, b])$.* Montrer qu'il existe des constantes A, B strictement positives telles que :

$$\forall f \in C([a, b]), \quad \|f\|_1 \leq A \|f\|_2 \\ \|f\|_2 \leq B \|f\|_\infty$$

On se place maintenant dans $C([0, 1])$. On considère les fonctions :

$$f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto t^n$$

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_\infty$. On considère les fonctions :

$$g_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \leq 1/n \mapsto n - n^2 t \\ t > 1/n \mapsto 0$$

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|g_n\|_1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|g_n\|_2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|g_n\|_\infty$.

Exercice  À faire vous-même pour voir si vous avez compris. Pour $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$, on définit :

$$N(f) = |f(0)| + \sup_{x \in [0, 1]} |f'(x)|$$

Démontrer que N est une norme sur l'espace vectoriel $C^1([0, 1], \mathbb{R})$.

Vrai/Faux

- (1) L'application $N : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} |P(n)|$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
 (2) L'application

$$N : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto \sup\{|a_n| \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{en notant} \quad P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$$

est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

- (3) L'application $N : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^3 + y^3)^{1/3}$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
 (4) L'application $N : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ est une norme sur $\mathbb{C}^2$.
 (5) Si $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ alors l'application $N : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|Ax\|_2$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

On considère un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . On rappelle qu'une norme sur E est une application N qui vérifie les conditions (a), (b), (c) et (d) suivantes :

- (a) N est bien définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$;
 - (b) Quels que soient $x, y \in E$, $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$;
 - (c) Quels que soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$;
 - (d) Quel que soit $x \in E$, $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.
- (6) Si N est une application qui vérifie (a), (b), (c) et de plus pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $N(x) > 0$ alors N est une norme sur E .
 (7) Si N est une application qui vérifie (a), (b), (d) et si de plus pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, $N(|\lambda|x) = |\lambda|N(x)$ alors N est une norme sur E .
 (8) Si N est une application qui vérifie (a), (b), (d) et si de plus pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, $N(\lambda^2 x) = |\lambda|^2 N(x)$ alors N est une norme sur E .
 (9) Si N est une application qui vérifie (a), (b), (d) et si de plus pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, $N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$ alors N est une norme sur E .
 (10) Si N est une application définie sur E et s'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $N(x) \neq N(-x)$ alors N n'est pas une norme sur E .
 (11) Si N est une application définie sur E et s'il existe un vecteur $x \in E$ et un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $N(|\lambda|x) \neq |\lambda|N(x)$ alors N n'est pas une norme sur E .

On considère E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni d'une norme N . On note d la distance associée à cette norme.

- (12) Quels que soient $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $d(\lambda x, \mu y) = \lambda \mu d(x, y)$.
 (13) Quels que soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $d(\lambda x, \lambda y) = \lambda d(x, y)$.
 (14) Quels que soient $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $d(\lambda x, \mu y) = |\lambda||\mu|d(x, y)$.
 (15) Quels que soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|d(x, y)$.
 (16) Quels que soient $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|^2 d(x, y)$.
 (17) Quels que soient $x, y \in E$, $d(x, y) \neq d(y, x)$.
 (18) Pour $a \in E$ et $r > 0$, $\mathcal{B}(a, r) \subset \overline{\mathcal{B}}(a, r)$.
 (19) Pour $a \in E$ et $r > 0$, $\mathcal{B}(a, r) \subset \mathcal{S}(a, r)$.
 (20) Pour $a \in E$ et $r > 0$, $\mathcal{S}(a, r) \subset \mathcal{B}(a, r)$.
 (21) Pour $a \in E$ et $r > 0$, $\mathcal{S}(a, r/2) \subset \mathcal{B}(a, r) \subset \mathcal{B}(a, 2r)$.

On suppose que E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme N .

- (22) Si (u_n) est une suite d'éléments de E et a, b sont deux éléments de E et si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$ pour la norme N et $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} b$ pour la norme N , alors $a = b$.
- (23) Si (u_n) est une suite d'éléments de E et a, b sont deux éléments de E et si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$ pour la norme N et $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} b$ pour une autre norme N' , alors $a = b$.
- (24) Si (u_n) est une suite d'éléments de E et a, b sont deux éléments de E et si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$ pour la norme N et une suite extraite de (u_n) tend vers b pour la norme N , alors $a = b$.
- (25) Si (u_n) et (v_n) sont deux suites d'éléments de E qui convergent pour la norme N , alors la suite $(u_n + v_n)$ est bornée.
- (26) Si (u_n) est une suite d'éléments de E et $\lambda \in \mathbb{K}$ et si la suite (λu_n) converge pour la norme N , alors la suite (u_n) converge pour la norme N .
- (27) Si (u_n) est une suite d'éléments de E qui converge vers $a \in E$ pour la norme N et si de plus pour tout n , $N(u_n) > 0$, alors $a \neq 0$.
- (28) Si (u_n) est une suite d'éléments de E qui est bornée pour la norme N , alors il existe $a \in E$ tel que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$ pour la norme N .
- (29) Si (u_n) et (v_n) sont deux suites d'éléments de E et $a, b \in E$ sont tels que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$ et $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} b$, alors $N(u_n + v_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} N(a) + N(b)$.
- (30) Si (P_k) est une suite d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ et $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ sont tels que $P_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} Q$, alors $P'_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} Q'$.
- (31) Si (A_k) est une suite d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont tels que $A_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} B$ et si toutes les matrices A_k sont diagonalisables, alors B est diagonalisable.