Compléments d'algèbre linéaire

◇ Rappels de PCSI à relire : Les notations de l'algèbre linéaire, Applications linéaire, Bases d'un espace vectoriel, Notions de dimension, Noyau et image d'une application linéaire, Matrice d'un endomorphisme, Sous-espaces vectoriels, Sous-espaces engendrés, Somme de sous-espaces vectoriels, Déterminants.

◇ On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; E, E_i, F désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

I. Quelques rappels de première année

1 Applications linéaires

Théorème 1 – du rang

Si E est de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $\operatorname{rg} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim E$.

Théorème 2 – Application linéaire définie par l'image des vecteurs d'une base

Si E est un espace de dimension finie, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille quelconque d'éléments de F, alors il existe une unique application linéaire $f : E \to F$ telle que : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i) = u_i$.

Corollaire 3 – Égalité de deux applications linéaire

Si E est un espace de dimension finie, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $f, g \in \mathscr{L}(E,F)$, alors on a équivalence entre :
(i) Les applications f et g sont égales ;
(ii) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i) = g(e_i)$.

Théorème 4 – Changement de base pour un endomorphisme

Si E est de dimension finie, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E, $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$, alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = P^{-1} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times P$$

avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, c'est à dire $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$.

Théorème 5 – Équations linéaires

Une équation linéaire est une équation de la forme :

$$f(x) = b \tag{$*$}$$

avec $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et b un élément de F. L'inconnue est $x \in E$. Il y a deux cas possibles :
- *Si $b \notin \mathrm{Im}(f)$, alors l'équation $(*)$ ne possède pas de solution ;*
- *Si $b \in \mathrm{Im}(f)$, alors il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = b$ et dans ce cas l'ensemble des solutions de l'équation $(*)$ est :*

$$x_0 + \mathrm{Ker}(f) = \left\{x_0 + y \mid y \in \mathrm{Ker}(f)\right\}$$

2 Rappels sur les opérations matricielles

II. Produits d'espaces vectoriels, sommes, sommes directes

Définition 6 – Produit d'espaces vectoriels

Soient $E_1, \dots, E_p$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On définit leur produit cartésien :

$$E_1 \times \cdots \times E_p = \left\{(x_1, \dots, x_p) \mid \forall i [\![1,p]\!],\ x_i \in E_i\right\}$$

On définit deux opérations sur $E_1 \times \cdots \times E_p$ de la manière suivante. Pour $x = (x_1, \dots, x_p)$ et $y = (y_1, \dots, y_p)$ des éléments de $E_1 \times \cdots \times E_p$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose :

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p)$$
$$\lambda \cdot x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_p)$$

Muni de ces opérations, $E_1 \times \cdots \times E_p$ est lui-même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel appelé espace vectoriel produit de $E_1, \dots, E_p$.

Théorème 7 – Dimension d'un produit d'espaces vectoriels

On a les résultats suivants.

(1) *On reprend les mêmes notations. Si $E_1, \dots, E_p$ sont tous de dimension finie, alors $E_1 \times \dots \times E_p$ est lui-même de dimension finie et :*

$$\dim(E_1 \times \dots \times E_p) = \dim E_1 + \dots + \dim E_p$$

(2) *En particulier, si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, alors $E \times F$ est de dimension finie et $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$.*

Définition 8 – Sommes, sommes directes et sous-espaces supplémentaires

Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

- *On définit l'ensemble :*

$$F_1 + \dots + F_p = \left\{ x_1 + \dots + x_p \mid (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p \right\}$$

L'ensemble $F_1 + \dots + F_p$ est un sous-espace vectoriel de E appelé somme des sous-espaces $F_1, \dots, F_p$.

- *On dit que la somme $F_1 + \dots + F_p$ est directe lorsque :*

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p,\ x_1 + \dots + x_p = 0 \implies x_1 = \dots = x_p = 0$$

Lorsque c'est le cas, la somme $F_1 + \dots + F_p$ est notée $F_1 \oplus \dots \oplus F_p$.

- *On dit que $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces supplémentaires de E lorsque la somme $F_1 + \dots + F_p$ est directe et égale à E. On note alors :*

$$E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$$

⚠***Remarque.*** Les équivalences :

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} F + G = E \\ F \cap G = \{0\} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ \dim F + \dim G = \dim E \end{cases} \qquad \text{(en dimension finie)}$$

ne sont valables que pour des sommes de 2 sous-espaces vectoriels. □

Proposition 9 – Caractérisation des sommes directes, des supplémentaires

On reprend les mêmes notations. On a équivalence entre :

(i) *La somme $F_1 + \dots + F_p$ est directe;*

(ii) *Quel que soit $y \in F_1 + \dots + F_p$, il existe un unique $(x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p$ tel que $y = x_1 + \dots + x_p$.*

On a de même équivalence entre :

(i) *Les sous-espaces $F_1, \dots, F_p$ sont supplémentaires dans E ;*

(ii) *Quel que soit $y \in E$, il existe un unique $(x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p$ tel que $y = x_1 + \dots + x_p$.*

Proposition 10 – Dimension d'une somme

On reprend les mêmes notations. On a les résultats suivants :

(1) *Si $F_1, \dots, F_p$ sont de dimension finie, alors $F_1 + \cdots + F_p$ est de dimension finie et :*

$$\dim(F_1 + \cdots + F_p) \leqslant \dim F_1 + \cdots + \dim F_p$$

(2) *Dans la formule précédente, on a égalité si, et seulement si, la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe.*

(3) *Cas particulier $p = 2$. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de dimension finie, alors :*

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) \qquad \textit{(formule de Grassman)}$$

En particulier :

$$\dim(F + G) \leqslant \dim F + \dim G$$

et on a égalité si, et seulement si, $F \cap G = \{0\}$ si, et seulement si, la somme $F + G$ est directe.

Corollaire 11 – Supplémentaires et dimension

On suppose que E est de dimension finie et $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces vectoriels de E. On a équivalence entre :

(i) *Les sous-espaces $F_1, \dots, F_p$ sont supplémentaires dans E ;*

(ii) *La somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe et $\dim F_1 + \cdots + \dim F_p = \dim E$.*

Théorème 12 – Concaténation des bases

Si E est de dimension finie, $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces vectoriels de E admettant des bases respectives $\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_p$, alors on a équivalence entre :

(i) *Les sous-espaces $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces supplémentaires de E ;*

(ii) *La réunion $\mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2 \cup \cdots \cup \mathscr{B}_p$ est une base de E.*

La réunion $\mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2 \cup \cdots \cup \mathscr{B}_p$ est aussi appelée la concaténation des bases $\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_p$.

Définition 13 – Bases adaptées

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, on note $n = \dim E$.

- *Si F est un sous-espace vectoriel de E, de dimension p, on appelle base de E adaptée à F toute base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de E (*i.e.* toute base de E obtenue en complétant une base de F).*
- *Si $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces supplémentaires de E, on appelle base de E adaptée à la décomposition $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ obtenue par concaténation de bases de $F_1, \dots, F_p$.*

III. Sous-espaces stables

IV. Matrices par blocs et déterminants

V. Matrices semblables et trace

Définition 14 – Matrices semblables

Deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *sont semblables lorsqu'il existe* $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *tel que* $A = P^{-1}BP$.

Proposition 15

Soient E *de dimension finie,* $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ *une base de* E *et* $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. *On a les résultats suivants :*

(1) *Si* $\mathcal{B}'$ *est une base de* E *et* $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$, *alors* A *et* B *sont semblables (et* $B = P^{-1}AP$ *avec* P *la matrice de passage de* $\mathcal{B}$ *à* $\mathcal{B}'$ *) ;*

(2) *Si* B *est semblable à* A, *alors il existe* $\mathcal{B}'$ *base de* E *telle que* $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.

On dit que des matrices semblables représentent la même application linéaire dans des bases différentes.

Définition 16 – Trace d'une matrice carrée

Pour $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *on pose* $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Théorème 17 – Propriétés de la trace

(1) tr *est application linéaire de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *dans* $\mathbb{K}$ *;*

(2) $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ *et* $\mathrm{tr}(A^\top) = \mathrm{tr}(A)$ *;*

(3) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\forall P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$.

Définition 18 – Trace d'un endomorphisme

Si E *est de dimension finie et* $f \in \mathcal{L}(E)$, *on pose* $\mathrm{tr}\, f = \mathrm{tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ *où* $\mathcal{B}$ *est une base de* E *(le résultat est indépendant du choix de* $\mathcal{B}$*).*

Théorème 19 – Propriétés de la trace

(1) tr *est une application linéaire de* $\mathcal{L}(E)$ *dans* $\mathbb{K}$ *;*

(2) $\forall f, g \in \mathcal{L}(E)$, $\mathrm{tr}(fg) = \mathrm{tr}(gf)$.

VI. Formes linéaires et hyperplans

Les résultats à connaitre

Rappels de première année :

- Définition d'une application linéaire par l'image des vecteurs d'une base. Corollaires : caractérisation des application linéaires égales, de l'application linéaire nulle (savoir redémontrer rapidement que si f et g sont égales sur une base de E, alors $f = g$).
- Théorème du rang (en particulier : application aux matrices).
- Définition d'une équation linéaire; ensemble des solutions d'une telle équation.

Résultats de deuxième année :

- Trace d'une matrice carrée, d'un endomorphisme. Propriétés de la trace.
- Théorème du rang appliqué à une matrice $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.
- Définition de la somme de n sous-espaces d'un espace vectoriel E.
- Somme directe de n sous-espaces d'un espace vectoriel E; caractérisation dans le cas de la dimension finie.
- Définition de n sous-espaces supplémentaires; caractérisation dans le cas général, cas de la dimension finie.
- Définition : sous-espace stable par un endomorphisme, endomorphisme induit.
- Caractérisation des sous-espaces stables engendrés par une famille finie de vecteurs.
- Si f et g commutent, $\operatorname{Ker} f$ est stable par g (savoir redémontrer rapidement ce résultat).
- Matrice d'un endomorphisme dans une base adaptée à un sous-espace stable; matrice d'un endomorphisme dans une base adaptée à des sous-espaces supplémentaires stables.
- Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

Quelques objectifs du chapitre

- Savoir démontrer que des sous-espaces sont supplémentaires.
- Savoir traduire matriciellement des propriétés d'un endomorphisme, et inversement.
- Savoir établir qu'un sous-espace est stable par un endomorphisme.

En pratique

▸ Comment démontrer qu'une famille est une base ?

Pour démontrer que $(x_1, \dots, x_n)$, famille finie d'éléments de E, est une base de E, on peut :

- Appliquer la définition en montrant que $(x_1, \dots, x_n)$ est libre et génératrice de E;
- Démontrer que pour tout vecteur $x \in E$, il existe une *unique* famille $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ telle que $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$;
- Si l'on sait de plus que E est de dimension finie, avec $\dim E = n$, alors on peut soit montrer que $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, soit montrer qu'elle est génératrice.

▸ Comment démontrer que des sous-espaces sont supplémentaires ?

Pour démontrer que $E_1, \dots, E_n$, sous-espaces vectoriels de E, sont supplémentaires, on peut :

- Appliquer la définition : montrer que la somme $E_1 + \cdots + E_n$ est directe et égale à E;

- Démontrer que pour tout vecteur $x \in E$, il existe $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$ *uniques* tels que $x = x_1 + \cdots + x_n$;
- Si E est de dimension finie, on peut démontrer que $\dim E_1 + \cdots + \dim E_n = \dim E$ et que, pour tout vecteur $x \in E$, il existe $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$ tels que $x = x_1 + \cdots + x_n$.

Dans le cas où il n'y a que deux sous-espaces, E_1 et E_2, les méthodes précédentes s'appliquent mais on peut également :
- Démontrer que $E_1 + E_2 = E$ et $E_1 \cap E_2 = \{0\}$;
- Si E est de dimension finie, démontrer que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ et $\dim E_1 + \dim E_2 = \dim E$;
- Si E est de dimension finie, démontrer que $E_1 + E_2 = E$ et $\dim E_1 + \dim E_2 = \dim E$.

▸ Comment démontrer que $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est un isomorphisme ?

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Pour démontrer que f est un isomorphisme, on peut :
- Démontrer que f est bijective, pour cela on considère $y \in F$ et on montre qu'il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$;
- Démontrer que f est injective et surjective, pour cela on montre que $\operatorname{Im} f = F$ et $\operatorname{Ker} f = \{0\}$;
- Si E et F sont de dimension finie et $\dim E = \dim F$, il suffit de démontrer soit l'injectivité de f, soit la surjectivité.

Lorsque E et F sont de dimension finie, on peut aussi :
- Considérer la matrice M de f dans des bases de E et F et démontrer que M est inversible.

Enfin, si f est un endomorphisme de E et E est de dimension finie, on peut :
- Démontrer que $\det(f) \neq 0$.

▸ Comment appliquer le théorème du rang à une matrice ?

Considérons $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ l'application linéaire canoniquement associée à M. Le théorème du rang appliqué à f s'écrit : $\operatorname{rg} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{K}^p$. On rappelle que $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} f$, on convient de noter $\operatorname{Ker} M = \operatorname{Ker} f$, alors :

$$\operatorname{rg} M + \dim \operatorname{Ker} M = n \text{ (nombre de colonnes de } M)$$

▸ *** Sur les matrices (ou endomorphismes) nilpotents

Si $f \in \mathscr{L}(E)$ est nilpotent, alors :
- Il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$ (cet entier p s'appelle l'indice de nilpotence de f) ;
- Si on considère $x_0 \notin \operatorname{Ker}(f^{p-1})$, alors la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est libre ;

Si une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est strictement triangulaire supérieure (ou inférieure), alors elle est nilpotente, de même que l'endomorphisme canoniquement associé à A.

▸ *** Sur les matrices (ou endomorphismes) de rang 1

- Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang 1, alors il existe $X, Y \in \mathbb{K}^n$ non nuls tels que $M = XY^\top$;
- Si $X, Y \in \mathbb{K}^n$ et $M = XY^\top$, alors $\operatorname{rg} M \leqslant 1$ (M est nulle si $X = 0$ ou $Y = 0$ et de rang 1 sinon) ;

Illustrations du cours

Exercice 1 *Matrices semblables.* Démontrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ est semblable à :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 *Supplémentaires (1) Concaténation des bases.* Démontrer que les sous-espaces vectoriels

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = z + t = 0 \right\} \qquad G = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad H = \text{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3 *Supplémentaires (2) Utilisation de la dimension.* On suppose que E est un espace de dimension finie. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\text{Ker}\, f = \text{Ker}\, f^2$. Démontrer que $\text{Im}\, f \oplus \text{Ker}\, f = E$.

Exercice 4 *Supplémentaires (3) Existence et unicité de la décomposition.* Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 = f$. Démontrer que les sous-espaces $\text{Ker}\, f$, $\text{Ker}(f - \text{id})$ et $\text{Ker}(f + \text{id})$ sont des sous-espaces supplémentaires de E.

Exercice 5 *Sous-espaces stables.* Soit f l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Les sous-espaces

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid y + z = 0 \right\}; \qquad G = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont-ils stables par f ?

Exercice 6 *Sous-espaces stables et matrice triangulaire supérieure.* Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $T = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est triangulaire supérieure. Démontrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $F_i = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_i)$ est stable par f.

Exercice 7 *Sous-espaces stables et dérivation dans $\mathbb{K}_n[x]$.* On considère l'endomorphisme :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$$

Déterminer les sous-espaces stables par f (indication : considérer F sous-espace stable par f et $P_0 \in F$ de degré maximal).

Exercice 8 *Endomorphismes tels que $f \circ g = 0$.* Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Démontrer l'équivalence :

$$f \circ g = 0 \iff \operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$$

Exercice 9 *Équation linéaire.* On veut déterminer les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n + 2^n \tag{E}$$

(a) Vérifier que (E) est une équation linéaire.
(b) Résoudre l'équation homogène associée à (E).
(c) Chercher une solution particulière de (E) sous la forme $u_n = C2^n$ avec $C \in \mathbb{R}$.
(d) Résoudre l'équation (E).

Exercice ✎ *À faire vous-même pour voir si vous avez compris.*

(a) Démontrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer une base et la dimension de F.
(b) Démontrer que F et $\mathbb{R}_0[X]$ sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}_2[X]$.
(c) Déterminer la matrice M dans la base $\mathscr{C} = (1, X, X^2)$ du projecteur sur $\mathbb{R}_0[X]$ parallèlement à F.
(d) Démontrer que M est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Vrai/Faux

Dans tout ce qui suit, E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
On considère une application $f : E \to F$ linéaire.

(1) Si f est un isomorphisme, alors $\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim F$.
(2) Si $\operatorname{rg} f = \dim E$, alors f est surjective.
(3) Si f est injective, alors $\operatorname{Ker} f = \emptyset$.
(4) Si f est injective, alors f est surjective.
(5) Si $x \in E$ et $f(x) = 0$ alors $f = 0$ ou $x = 0$.

On considère maintenant un espace vectoriel E de dimension finie et deux applications linéaires $f : E \to E$ et $g : E \to E$.

(6) Si $f^2 = 0$ alors $f = 0$.
(7) Si $f \circ g = 0$ alors $f = 0$ ou $g = 0$.
(8) Si $f \circ g = 0$ alors g n'est pas injective.
(9) Si $\operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} f$, alors $f \circ g = 0$.
(10) Les sous-espaces $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont des sous-espaces supplémentaires de E.

On considère E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

(11) Si F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de E tels que $F \oplus G = E$ et $F \oplus H = E$, alors $G = H$.
(12) Si $(e_1, \dots, e_n)$ et $(u_1, \dots, u_n)$ sont deux bases de E, alors $(u_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E.
(13) Si $e_1, \dots, e_n$ sont des vecteurs de E et si de plus $e_2 \notin \operatorname{Vect}(e_1)$, $e_3 \notin \operatorname{Vect}(e_2)$, etc. $e_n \notin \operatorname{Vect}(e_{n-1})$, alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E.
(14) Si $(e_1, \dots, e_n)$ et $(u_1, \dots, u_n)$ sont deux bases de E, alors il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que la famille $(u_i, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E.
(15) Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille libre de E et $(u_1, \dots, u_q)$ est une famille génératrice de E, alors $p \leqslant q$.
(16) Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $n \geqslant 3$, alors $\operatorname{Vect}(e_1) \oplus \operatorname{Vect}(e_2) \oplus \operatorname{Vect}(e_3, \dots, e_n) = E$.

On considère toujours $f : E \to E$ et $g : E \to E$ linéaires.

(17) Si f n'est pas injective, alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que la première colonne de la matrice de f dans $\mathscr{B}$ est nulle.
(18) Si F, G, H sont trois sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim F + \dim G + \dim H = \dim E$ et $F \cap G = F \cap H = G \cap H = \{0\}$, alors $F \oplus G \oplus H = E$.
(19) Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim F + \dim G = \dim E$ et $F + G = E$, alors $F \oplus G = E$.
(20) Si f est un automorphisme et s'il existe $\mathscr{B}$ base de E telle que $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$, alors g est un automorphisme.
(21) Si f est nilpotente et s'il existe $\mathscr{B}$ base de E telle que $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$, alors g est nilpotente.
(22) Si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E telle que $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est diagonale, alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $e_i \in \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id})$.
(23) Si $f^2 = f$, alors $\operatorname{Ker}(2f) \oplus \operatorname{Im} f = E$.
(24) Si f est un projecteur, alors $-f$ est également un projecteur.
(25) Si f est un projecteur, alors $\operatorname{id} - f$ est un projecteur.

(26) Si f est un projecteur, alors $\mathrm{id}+f$ est un projecteur.
(27) Si f est une symétrie, alors f est un automorphisme.
(28) Si f est une symétrie, alors $\dfrac{f+\mathrm{id}}{2}$ est un projecteur.
(29) Si F est un sous-espace de E stable par f, alors pour tout $x \in F$, $f(x) = x$.
(30) Si F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E et F est stable par f, alors G est stable par f.

1V2F3F4F5F6F7F8F9V10F11F12F13F14V15V16V17V18F19V20V21V22V23V24F25V26F27V28V29F30F