

Endomorphismes des espaces euclidiens

Notations : E est un espace euclidien et $n = \dim E$.

□

I. Calculs matriciels

◇ On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .

(1) Soient $x, y \in E$, on note $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, $y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$ et on pose :

$$X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} X^\top Y &= x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \langle x, y \rangle \\ X^\top X &= x_1^2 + \dots + x_n^2 = \|x\|^2 = \langle x, x \rangle \end{aligned}$$

(2) De plus, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\langle x, e_i \rangle = x_i$ donc $X = \begin{pmatrix} \langle x, e_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, e_n \rangle \end{pmatrix}$.

(3) On considère de plus $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = (a_{ij})$. On a alors :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(x)) &= AX \\ \langle x, f(y) \rangle &= X^\top AY \\ \langle f(x), y \rangle &= (AX)^\top Y = X^\top A^\top Y \end{aligned}$$

(4) Cas particulier intéressant : si A est une matrice symétrique, alors $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$ quels que soient $x, y \in E$.

(5) On a de plus pour $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} f(e_j) &= a_{1j} e_1 + \dots + a_{nj} e_n \\ a_{ij} &= \langle e_i, f(e_j) \rangle \end{aligned}$$

donc $A = (\langle e_i, f(e_j) \rangle)$.

(6) Pour $u_1, \dots, u_n \in E$, si on note :

$$P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = (p_{ij})$$

alors on a :

$$P^T P = (\langle u_i, u_j \rangle)$$

Ainsi, la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est une base orthonormée de E si, et seulement si, la matrice P vérifie la condition $P^T P = I_n$. Une matrice vérifiant cette condition est appelée une matrice orthogonale.

II. Matrices orthogonales : première approche

Définition 1 – Matrice orthogonale

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale lorsque $M^T M = I_n$. L'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est noté $O_n(\mathbb{R})$:

$$O_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^T M = I_n\}$$

Remarque. Une matrice orthogonale P est inversible et $P^{-1} = P^T$. On a donc $O_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$. $\square$

Proposition 2 – Matrice de changement de bases orthonormées

On a les résultats suivants.

- (1) Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormées de E , alors $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ est une matrice orthogonale.
- (2) Réciproquement, si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E et $M \in O_n(\mathbb{R})$, alors la famille $\mathcal{B}'$ telle que $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ est orthonormée.

Théorème 3 – Caractérisations des matrices orthogonales

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a équivalence entre :

- (i) $M \in O_n(\mathbb{R})$;
- (ii) $M^T M = I_n$;
- (iii) M est inversible et $M^{-1} = M^T$;
- (iv) $MM^T = I_n$;
- (v) Les colonnes de M constituent une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$;
- (vi) Les lignes de M constituent une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

avec $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique pour (v) et (vi).

III. Endomorphismes autoadjoints (symétriques)

IV. Isométries vectorielles

Définition 4 – Isométrie vectorielle (automorphisme orthogonal)

Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est appelé une isométrie vectorielle (automorphisme orthogonal) lorsque :

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$$

On note $O(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E .

Théorème 5 – Caractérisations des isométries vectorielles

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E . On a équivalence entre :

- (i) $f \in O(E)$;
- (ii) $\forall x, y \in E, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$;
- (iii) $f(\mathcal{B})$ est une base orthonormée de E .

Théorème 6 – Caractérisation matricielle des isométries vectorielles

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E . On a équivalence entre :

- (i) $f \in O(E)$;
- (ii) $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in O_n(\mathbb{R})$.

Théorème 7 – Groupe orthogonal de E

On a les résultats suivants :

- (1) $\text{id}_E \in O(E)$;
- (2) Si $f, g \in O(E)$, alors $fg \in O(E)$;
- (3) Si $f \in O(E)$, alors $f \in GL(E)$ et $f^{-1} \in O(E)$.

On dit que $O(E)$ est le groupe orthogonal de E .

Proposition 8 – Orthogonal d'un sous-espace stable

Si $f \in O(E)$ et F est un sous-espace vectoriel de E stable par f , alors $F^\perp$ est stable par f .

V. Matrices orthogonales : le groupe orthogonal

Théorème 9 – Groupe orthogonal

On a les résultats suivants :

- (1) $I_n \in O_n(\mathbb{R})$;
- (2) Si $M, N \in O_n(\mathbb{R})$, alors $MN \in O_n(\mathbb{R})$;
- (3) Si $M \in O_n(\mathbb{R})$, alors $M \in GL_n(\mathbb{R})$ et $M^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.

On dit que $O_n(\mathbb{R})$ est le groupe orthogonal d'ordre n .

Proposition 10 – Déterminant d'une matrice orthogonale

Si $M \in O_n(\mathbb{R})$, alors $\det(M) \in \{-1, 1\}$ (la réciproque est fausse).

Notations : On note $SO_n(\mathbb{R})$ (ou $SO(n)$) l'ensemble des matrices $M \in O_n(\mathbb{R})$ telles que $\det(M) = 1$. □

Théorème 11 – Groupe spécial orthogonal

On a les résultats suivants :

- (1) $I_n \in SO_n(\mathbb{R})$;
- (2) Si $M, N \in SO_n(\mathbb{R})$, alors $MN \in SO_n(\mathbb{R})$;
- (3) Si $M \in SO_n(\mathbb{R})$, alors $M \in GL_n(\mathbb{R})$ et $M^{-1} \in SO_n(\mathbb{R})$.

On dit que $O_n(\mathbb{R})$ est le groupe spécial orthogonal d'ordre n .

Définition 12 – Orientation d'un espace euclidien

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormées de E , alors $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \in \{-1, 1\}$. On dit que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormées de même sens lorsque $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$. Dans le cas contraire, on dit que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont de sens contraires. Orienter E , c'est choisir une base orthonormée $\mathcal{B}_0$ de E et appeler bases directes les bases de même sens que $\mathcal{B}_0$.

VI. Isométries vectorielles du plan

Théorème 13 – Matrices de $O_2(\mathbb{R})$ et $SO_2(\mathbb{R})$

Soit $M \in O_2(\mathbb{R})$. On a les résultats suivants :

- (1) Si $\det(M) = 1$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$, unique à 2π près, tel que $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = R(\theta)$.
- (2) Si $\det(M) = -1$, alors il existe θ , unique à 2π près, tel que $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ et il existe $P \in SO_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}MP = \text{diag}(1, -1) = S$.

Proposition 14 – Commutativité de $SO_2(\mathbb{R})$

Si $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, alors $R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta')$. Deux matrices de $SO_2(\mathbb{R})$ commutent, on dit que le groupe $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif.

Théorème 15 – Automorphismes orthogonaux de $\mathbb{R}^2$

Soit $f \in O(\mathbb{R}^2)$. On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique et on oriente $\mathbb{R}^2$ de sorte que la base canonique soit directe. On a les résultats suivants :

- (1) Si $\det(f) = 1$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$, unique à 2π près, tel que la matrice de f dans toute base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$ soit $R(\theta)$. On dit alors que f est la rotation vectorielle de $\mathbb{R}^2$, d'angle θ ;
- (2) Si $\det(f) = -1$, alors il existe une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est S . On dit alors que f est une réflexion de $\mathbb{R}^2$.

VII. Matrices et endomorphismes (définis-) positifs

Définition 16 – Endomorphisme autoadjoint (défini-) positif

Soit $f \in \mathcal{S}(E)$. On dit que f est :

- Un endomorphisme autoadjoint positif lorsque : $\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle f(x), x \rangle \geq 0$;
- Un endomorphisme autoadjoint défini-positif lorsque : $\forall x \in E \setminus \{0\}, \langle f(x), x \rangle > 0$.

Définition 17 – Matrice symétrique (définie-) positive

Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est :

- Une matrice symétrique positive lorsque : $\forall x \in \mathbb{R}^n, x^\top M x \geq 0$;
- Une matrice symétrique définie-positive lorsque : $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x^\top M x > 0$.

Théorème 18 – Caractérisations spectrales

Soient $f \in \mathcal{S}(E)$ et $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f \text{ est autoadjoint positif} &\iff \text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}^+ \\ f \text{ est autoadjoint défini-positif} &\iff \text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}^{+*} \\ M \text{ est symétrique positive} &\iff \text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}^+ \\ M \text{ est symétrique définie-positive} &\iff \text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}^{+*} \end{aligned}$$

Les résultats à connaître

- Matrice orthogonale.
- Caractérisation avec la transposée; caractérisation avec les colonnes et les lignes, caractérisation comme matrice de changement de bases orthonormées;
- Endomorphisme autoadjoint (plutôt que symétrique).
- Caractérisation matricielle des endomorphismes autoadjoints.
- Théorème spectral pour un endomorphisme autoadjoint de E .
- Théorème de diagonalisation des matrices symétriques.
- Deux sous-espaces propres pour un endomorphisme autoadjoint associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux (savoir redémontrer rapidement ce résultat).
- Caractérisation des projecteurs orthogonaux.
- Isométrie vectorielle (plutôt que automorphisme orthogonal). C'est un automorphisme.
- Caractérisation par conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée.
- Orthogonal d'un sous-espace stable par une isométrie vectorielle;
- Caractérisation matricielle des isométries vectorielles.
- Déterminant d'une isométrie vectorielle, d'une matrice orthogonale.
- Groupe $O_n(\mathbb{R})$. Groupe $SO_n(\mathbb{R})$. Groupe $O(E)$.
- Matrices de $SO_2(\mathbb{R})$ et $O_2(\mathbb{R})$. Commutativité de $SO_2(\mathbb{R})$.
- Classification des isométries vectorielles de $\mathbb{R}^2$.
- Endomorphisme autoadjoint positif, défini-positif. Caractérisation spectrale (savoir redémontrer rapidement ce résultat).
- Matrice symétrique positive, définie-positive. Caractérisation spectrale.

On pourra en profiter pour aborder les points suivants (programme de première année) :

- Définition de produit scalaire (cas réel uniquement), norme associée.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité.
- Orthogonal d'un sous-espace vectoriel.
- Projection orthogonale et théorème associé.

Quelques objectifs du chapitre

- Savoir démontrer qu'un endomorphisme est un automorphisme orthogonal.
- Savoir démontrer qu'une matrice est orthogonale.
- Savoir étudier les automorphismes orthogonaux en dimension 2.
- Savoir démontrer qu'un endomorphisme est symétrique.
- Savoir utiliser le théorème spectral (version matricielle, version géométrique).
- Savoir diagonaliser rapidement une matrice 3×3 symétrique réelle.

En pratique

► Comment démontrer qu'un endomorphisme est une isométrie vectorielle ?

Soit $f : E \rightarrow E$. Avant tout : penser à démontrer que f est linéaire. On utilise ensuite l'une des conditions équivalentes suivantes ($\mathcal{B}$ désigne une base orthonormée de E) :

- (i) $f \in \mathcal{O}(E)$;
- (ii) Quels que soient $x, y \in E$, $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$;
- (iii) Quel que soit $x \in E$, $\|f(x)\|^2 = \|x\|^2$;
- (iv) L'image de $\mathcal{B}$ par f est une base orthonormée de E ;
- (v) La matrice de f dans $\mathcal{B}$ est une matrice orthogonale.

► Comment démontrer qu'une matrice M est orthogonale ?

Pour montrer que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale, on peut utiliser l'une des conditions équivalentes suivantes :

- (i) $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$;
- (ii) $M^\top M = I_n$;
- (iii) $MM^\top = I_n$;
- (iv) M est inversible et $M^{-1} = M^\top$;
- (v) Les vecteurs colonne de M forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$;
- (vi) Les vecteurs ligne de M forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ (pour le produit scalaire canonique).

► Comment étudier $f \in \mathcal{O}(E)$, lorsque $\dim E = 2$?

Il y a deux types d'éléments dans $\mathcal{O}(E)$:

- les rotations dont la matrice dans toute base $\mathcal{B}$ orthonormée directe est de la forme $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$;
- les réflexions, pour lesquelles il existe une base orthonormée directe dans laquelle la matrice est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Soit $f \in \mathcal{O}(E)$. Le déterminant de f :

- vaut 1 si f est une rotation;
- vaut -1 si f est une réflexion.

Le sous-espace $F = \text{Ker}(f - \text{id}) = E_1(f)$ des invariants de F :

- est de dimension 0 ou 2 si f est une rotation;
- est de dimension 1 si f est une réflexion (c'est alors la réflexion par rapport à F).

► Comment étudier « géométriquement » une « transformation » de E ?

(pas seulement les isométries et pas uniquement dans le cas où $\dim E = 2$.) Si on dispose de $f \in \mathcal{L}(E)$ et que l'on doit l'étudier géométriquement, on peut commencer par déterminer f^2 .

- Si $f^2 = \text{id}$, alors f est une symétrie de E . C'est alors la symétrie par rapport à $\text{Ker}(f - \text{id}) = E_1(f)$ parallèlement à $\text{Ker}(f + \text{id}) = E_{-1}(f)$. Si de plus f est autoadjoint, alors ses sous-espaces propres sont orthogonaux donc f est une symétrie orthogonale.
- Si $f^2 = f$, alors f est un projecteur de E . C'est alors le projecteur sur $\text{Ker}(f - \text{id}) = E_1(f)$ parallèlement à $\text{Ker}(f) = E_0(f)$. Si de plus f est autoadjoint, alors ses sous-espaces propres sont orthogonaux donc f est une symétrie orthogonale.

Si on n'a ni $f^2 = f$ ni $f^2 = \text{id}$ et si $\dim E = 2$, on peut regarder si f est une rotation de E .

► Comment démontrer qu'un endomorphisme est autoadjoint ?

Soit $f : E \rightarrow E$. Avant tout : penser à démontrer que f est linéaire. On utilise ensuite l'une des conditions équivalentes suivantes ($\mathcal{B}$ désigne une base orthonormée de E) :

- (i) $f \in \mathcal{S}(E)$;
- (ii) Quels que soient $x, y \in E$, $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$;
- (iii) La matrice de f dans $\mathcal{B}$ est une matrice symétrique.

► Comment utiliser le théorème spectral ?

- Si M est une matrice symétrique réelle, alors M est diagonalisable et il existe P orthogonale et D diagonale telles que $P^\top M P = D$.
- Si $f \in \mathcal{S}(E)$, alors f est diagonalisable et si on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de f (chacune apparaissant autant de fois que sa multiplicité en tant que racine de χ_f), alors il existe $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base orthonormée de E telle que $f(e_i) = \lambda_i e_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. En particulier si on note, dans une telle base $\mathcal{B}$, $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ avec $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda_1 x_1 e_1 + \dots + \lambda_n x_n e_n \\ \|f(x)\|^2 &= \lambda_1^2 x_1^2 + \dots + \lambda_n^2 x_n^2 \\ \langle f(x), x \rangle &= \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 \end{aligned}$$

► Comment démontrer qu'un endomorphisme autoadjoint est (défini-)positif ?

Il faut tout d'abord disposer d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint. Pour montrer que f est défini-positif :

- Si on connaît $\text{Sp}(f)$, il suffit de vérifier que $\text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}^{+*}$;
- Sans connaître explicitement $\text{Sp}(f)$, on peut considérer λ une valeur propre quelconque de f et démontrer que $\lambda > 0$;
- Ou alors on peut utiliser la définition et démontrer que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $\langle f(x), x \rangle > 0$.

Quelques remarques supplémentaires.

- Pour le dernier point, on arrive souvent à établir des relations du type $\langle f(x), x \rangle = \dots = \|\dots\|^2$ ce qui permet d'assurer la positivité.
- Ceci s'applique également pour montrer qu'un endomorphisme autoadjoint est positif (remplacer $\mathbb{R}^{+*}$ par $\mathbb{R}^+$ et > 0 par ≥ 0).
- Ceci s'applique également pour établir qu'une matrice symétrique réelle est positive ou définie-positive.

Illustrations du cours

Exercice 1 Une matrice orthogonale. Démontrer que la matrice M suivante est orthogonale :

$$M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 Un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}_n[X]$. Sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, on définit le produit scalaire : $(P, Q) \mapsto \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$ et on considère l'application f définie sur E par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], f(P) = 2XP' + (X^2 - 1)P''$$

Démontrer que f est autoadjoint.

Exercice 3 Un endomorphisme autoadjoint de E . Soit $a \in E$. On définit une application f sur E en posant :

$$\forall x \in E, f(x) = x - \langle a, x \rangle a$$

- (a) Démontrer que f est un endomorphisme autoadjoint de E .
- (b) On suppose que $\|a\| = 1$. Démontrer que f est un projecteur orthogonal de E .

Exercice 4 Une propriété des endomorphismes autoadjoints. Démontrer que si $f \in \mathcal{L}(E)$ est autoadjoint, alors $\text{Ker } f = (\text{Im } f)^\perp$.

Exercice 5 Diagonalisation de matrices symétriques réelles de taille 3. Déterminer une base orthonormée de vecteurs propres pour chacune des matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 Équation matricielle (1). Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$. Démontrer qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

Exercice 7 Équation matricielle (2). Déterminer les matrices $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^3 - 2A^2 + 3A = 0$.

Exercice 8 Une isométrie vectorielle de E . Soit $a \in E$, $a \neq 0$. On définit une application f sur E en posant :

$$\forall x \in E, f(x) = x - \langle a, x \rangle a$$

- (a) Déterminer à quelle condition sur a l'endomorphisme f est une isométrie vectorielle.
- (b) Lorsque cette condition est satisfaite, décrire f .

Exercice 9 Une propriété des isométries vectorielles. Si $f \in \text{O}(E)$, alors $\text{Sp}(f) \subset \{-1, 1\}$ et les sous-espaces $\text{Ker}(f - \text{id})$ et $\text{Ker}(f + \text{id})$ sont orthogonaux.

Exercice 10 *Isométries vectorielles de $\mathbb{R}^2$.* On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique.

(a) Étudier les endomorphismes canoniquement associés aux matrices :

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- (b) Déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation qui envoie le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sur le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- (c) Déterminer la matrice dans la base canonique de la réflexion qui envoie le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sur le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 11 *Une caractérisation des symétries orthogonales.* Soit $s : E \rightarrow E$. Démontrer l'équivalence entre :

- (i) L'application s est une symétrie orthogonale de E ;
- (ii) L'application s est un endomorphisme autoadjoint de E et $s^2 = \text{id}$.

Exercice  *À faire vous-même pour voir si vous avez compris.* On travaille dans $\mathbb{R}_1[X]$ avec le produit scalaire de l'exercice 2. Pour $P \in \mathbb{R}_1[X]$ on définit :

$$f(P) = P(X) - P(-X) \\ g(P) = P(-X)$$

Expliciter $f(P)$ et $g(P)$ en notant $P = aX + b$. Démontrer que f est un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}_1[X]$ et g est une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}_1[X]$.

Vrai/Faux

On considère un espace euclidien E .

- (1) Si $f \in \mathcal{S}(E)$, alors il existe $\mathcal{B}$ base orthonormée de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.
- (2) Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux, alors $f \in \mathcal{S}(E)$.
- (3) Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et il existe $\mathcal{B}$ base orthonormée de E constituée de vecteurs propres pour f , alors $f \in \mathcal{S}(E)$.
- (4) Si $f \in \mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{B}$ est une base de E constituée de vecteurs propres pour f , alors $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E .
- (5) Si $f \in \mathcal{S}(E)$ et u et v sont deux vecteurs propres de f , alors soit u et v sont associés à la même valeur propre, soit u et v sont orthogonaux.
- (6) Si $f \in \mathcal{S}(E)$ et $f^2 = f$, alors f est un projecteur orthogonal.
- (7) Si f est un projecteur orthogonal, alors $f \in \mathcal{S}(E) \cap \mathcal{O}(E)$.
- (8) Si $f \in \mathcal{S}(E)$ et $f^2 = \text{id}$, alors f est une symétrie orthogonale.
- (9) Si f est une symétrie orthogonale, alors $f \in \mathcal{S}(E) \cap \mathcal{O}(E)$.
- (10) Si $f \in \mathcal{S}(E)$ et $\text{Sp}(f) = \{-1, 1\}$, alors f est une symétrie orthogonale.
- (11) Si $f \in \mathcal{S}(E)$ et f est une symétrie orthogonale, alors $\text{Sp}(f) = \{-1, 1\}$.
- (12) Si $f \in \mathcal{S}(E)$ et $\text{Sp}(f) = \{0, 1\}$, alors f est un projecteur orthogonal.
- (13) Si $f \in \mathcal{S}(E)$ et f est un projecteur orthogonal, alors $\text{Sp}(f) = \{0, 1\}$.
- (14) Si $f \in \mathcal{S}(E)$ et $f \in \text{GL}(E)$, alors $f^{-1} \in \mathcal{S}(E)$.
- (15) Si $f \in \mathcal{O}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f \in \mathcal{O}(E)$.
- (16) Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\forall x \in E, \langle f(x), x \rangle = \langle x, f(x) \rangle$, alors $f \in \mathcal{S}(E)$.

L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique.

- (17) Si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et f est l'endomorphisme canoniquement associé à f , alors $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
- (18) Si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}MP$ est diagonale.
- (19) Si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}MP$ est diagonale.
- (20) Si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et si $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et $P^{-1}MP$ est diagonale, alors $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
- (21) Si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $\text{Sp}(M) = \{-1, 1\}$.
- (22) Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et s'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}MP$ est diagonale, alors $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
- (23) Si $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et si M est diagonalisable, alors $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
- (24) Si $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\text{Sp}(M) = \{-1, 1\}$, alors M est diagonalisable.

Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni du produit scalaire canonique. Le terme « rotation » signifie « rotation vectorielle de $\mathbb{R}^2$. » On rappelle qu'une réflexion de $\mathbb{R}^2$ est une symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^2$ par rapport à un sous-espace vectoriel de dimension 1.

- (25) La composée de deux rotations de $\mathbb{R}^2$ est une rotation.
- (26) La composée de deux réflexions de $\mathbb{R}^2$ est une réflexion.
- (27) Si r est une rotation de $\mathbb{R}^2$, alors il existe deux réflexions s_1 et s_2 telles que $r = s_1 \circ s_2$.
- (28) Si s est une réflexion de $\mathbb{R}^2$, alors il existe deux rotations r_1 et r_2 telles que $s = r_1 \circ r_2$.
- (29) Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \cap \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ alors f n'est pas une rotation.
- (30) Si $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ et $\text{Sp}(f) \neq \emptyset$, alors f est diagonalisable.