

Compléments sur la réduction et applications

I. Décomposition en somme de projecteurs

II. Quelques endomorphismes/matrices particuliers

Illustrations du cours

Exercice 1 *Applications de la réduction.*

- **Suites récurrentes linéaires.** On considère une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$$

- (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $V_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = AV_n$$

- (b) Déterminer les racines $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de χ_A .
(c) Démontrer que A est diagonalisable. En déduire qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a\lambda_1^n + b\lambda_2^n + c\lambda_3^n$$

On peut alors déterminer a, b, c à partir de certains termes connus de la suite (u_n) .

Les autres applications usuelles (étudiées par ailleurs) de la réduction d'une matrice A sont :

- **Recherche de sous-espaces stables.**
- **Expliciter les puissances de A .**
- **Résoudre l'équation $M^2 = A$.**
- **Déterminer le commutant de A** (l'ensemble des matrices M telles que $AM = MA$).
- **Résoudre un système d'équations différentielles associé à A .**

En pratique

► Étudier rapidement la diagonalisabilité de $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$

On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on travaille sur $\mathbb{K}$. On détermine χ_A et on le factorise sur $\mathbb{K}$. On sait que χ_A est de degré 3 et unitaire.

- Si χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{K}$, alors A n'est pas diagonalisable.
- Si $\chi_A = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ distincts, alors A possède 3 valeurs propres distinctes donc est diagonalisable.
- Si $\chi_A = (X - \alpha)^3$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$, alors $\text{Sp}(A) = \{\alpha\}$ donc A est diagonalisable si, et seulement si, $A = \alpha I_3$.
- Si $\chi_A = (X - \alpha)^2(X - \beta)$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ distincts, alors :

$$\begin{aligned} A \text{ diagonalisable} &\iff \dim E_\alpha(A) = 2 \\ &\iff \text{rg}(A - \alpha I_3) = 1 \end{aligned}$$

► Quelques méthodes pour obtenir des éléments propres

On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Si la somme des coefficients sur chaque ligne de A est constante égale à s , alors :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

donc s est valeur propre de A et $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in E_s(A)$.

- Si $\text{rg } A = r < n$, alors $\dim \text{Ker } A = n - r < n$ donc $0 \in \text{Sp}(A)$, $\dim E_0(A) = n - r$ et 0 est racine de χ_A de multiplicité au moins $n - r$. Autrement dit χ_A est de la forme :

$$\chi_A(X) = X^{n-r} Q(X)$$

avec Q un polynôme de degré r et unitaire.

- Si on dispose de $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ valeurs propres de A de multiplicités (au moins égales à) $m_1, \dots, m_k$ et si $m_1 + \dots + m_k = n - 1$, alors la valeur propre manquante λ s'obtient avec :

$$\lambda + m_1 \lambda_1 + \dots + m_k \lambda_k = \text{tr}(A)$$

- Pour faire des essais pour trouver des vecteurs propres et des valeurs propres de A , on peut se rappeler que le produit

$$A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

est la combinaison linéaire $\alpha_1 C_1 + \dots + \alpha_n C_n$ avec $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A .