Calcul différentiel

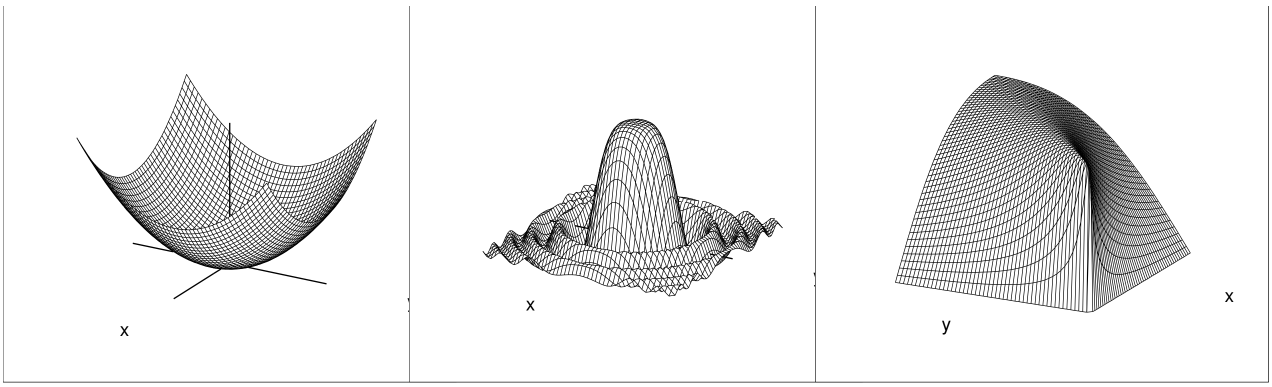
◇ Le but du chapitre est de définir les dérivées partielles ainsi que la notions de classe C^1 pour les fonctions de plusieurs variables. Les applications usuelles de ceci :

- La recherche d'extrémums : si f est de classe C^1 sur un intervalle ouvert U et si f admet un extrémum en $a \in U$ alors les dérivées partielles de f s'annulent en a.
- La résolution d'équations aux dérivées partielles, par exemple l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Remarque. Les résultats de ce chapitre s'appliquent à des fonctions de n variables. Pour simplifier, les énoncés sont données pour des fonctions de 2 variables, notées en général x et y et on fera des remarques sur les fonctions de 3 variables. □

◇ Quelques représentations graphiques de fonctions de 2 variables. Si f est une fonction de 2 variables, on peut représenter graphiquement f dans l'espace en plaçant les points de coordonnées (x, y, z) avec $z = f(x, y)$. Cela donne une surface dans l'espace (de manière analogue, la représentation graphique d'une fonction f d'une seule variable est la courbe du plan constituée des points de coordonnées (x, y) avec $y = f(x)$). On donne ci-dessous quelques exemples de surface représentant des fonctions de 2 variables.



$$f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad f(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \ = 1 \text{ sinon} \qquad f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \ = 0 \text{ sinon}$$

Notation : Dans la suite U sera un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$ pour les fonctions de 3 variables).□

Remarque. Nous aurons besoin dans ce chapitre de notions étudiées dans le cours de topologie, essentiellement ouvert, fermé et continuité pour une fonction de plusieurs variables. On utilisera aussi la norme usuelle $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$ (dans le cas de 3 variables $\|(x,y,z)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$). □

I. Fonctions d'une seule variable à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

⋄ On note I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. On appelle fonction vectorielle définie sur I toute fonction $f : I \to \mathbb{R}^n$.

Remarque. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, on peut tout aussi bien considérer des fonctions vectorielles $f : I \to E$. □

Définition 1 – Dérivabilité, fonctions de classe C^k

Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$.

- *Soit $a \in I$. On dit que f est dérivable en $a \in I$ lorsque le taux d'accroissement :*

$$\frac{1}{t-a}(f(t) - f(a))$$

admet une limite finie (dans $\mathbb{R}^n$) lorsque $t \to a$. Lorsque c'est le cas, on pose :

$$f'(a) = \lim_{t \to a} \frac{1}{t-a}(f(t) - f(a))$$

- *On dit que f est dérivable sur I lorsqu'elle est dérivable en tout point de I. Lorsque c'est le cas, on définit la fonction :*

$$f' : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^n \\ a & \mapsto & f'(a) \end{array}$$

- *On dit que f est est de classe C^1 sur I lorsque f est dérivable sur I et f' est continue sur I.*
- *Pour $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant 2$, on dit que f est de classe C^k sur I lorsque f est dérivable sur I et f' est de classe C^{k-1} sur I.*
- *On dit que f est de classe C^∞ sur I lorsque f est de classe C^k sur I quel que soit $k \in \mathbb{N}$.*

On définit les notations usuelles : $\mathrm{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$, $\mathrm{C}^\infty(I, \mathbb{R}^n)$.

Remarque. Si on considère $f(t)$ comme la position d'un point mobile à l'instant t, $f'(t)$ s'interprète comme la vitesse du point et $f''(t)$ comme l'accélération. □

Proposition 2 – Caractérisation avec un DL_1

Soient $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $a \in I$. On a équivalence entre :
(i) f est dérivable en a ;
(ii) Il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}^n$ tels que :

$$\forall t \in I,\ f(t) = f(a) + (t-a)v + (t-a)\varepsilon(t) \quad \text{et} \quad \varepsilon(t) \xrightarrow[t\to a]{} 0$$

et, lorsque c'est le cas, $v = f'(a)$. On écrit alors :

$$f(t) = f(a) + (t-a)f'(a) + \underset{t\to a}{\mathrm{o}}(t-a)$$

(développement limité de f à l'ordre 1 en a).

Proposition 3 – Caractérisation par les coordonnées

Soient $f : I \to \mathbb{R}^n$, $\mathscr{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$ et $x_1, \dots, x_n$ les composantes de f dans $\mathscr{B}$. On a équivalence entre :
(i) La fonction f est de classe C^k sur I ;
(ii) Les fonctions $x_1, \dots, x_n$ sont de classe C^k sur I.
et lorsque c'est le cas, les composantes de f' dans $\mathscr{B}$ sont $x_1', \dots, x_n'$.

Proposition 4 – Opérations sur les fonctions de classe C^k

On a les résultats usuels sur les sommes, produits, composées de fonctions de classe C^k (non rédigés ici). Concernant les produits, on a les résultats suivants :
(1) Si $f \in \mathrm{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$ et $\lambda \in \mathrm{C}^k(I, \mathbb{R})$, alors $\lambda f \in \mathrm{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$ et $(\lambda f)' = \lambda' f + \lambda f'$.
(2) Si $f \in \mathrm{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$ et $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, alors $A \times f \in \mathrm{C}^k(I, \mathbb{R}^p)$ et $(A \times f)' = A \times (f')$;
(3) Si $f \in \mathrm{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$ et $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, alors $L \circ f \in \mathrm{C}^k(I, \mathbb{R}^p)$ et $(L \circ f)' = L \circ f'$;
(4) Si $f, g \in \mathrm{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$ et $B : (\mathbb{R}^n)^2 \to \mathbb{R}^p$ est bilinéaire, alors $B(f,g) \in \mathrm{C}^k(I, \mathbb{R}^p)$ et $B(f,g)' = B(f',g) + B(f,g')$.

Remarque. Avec en particulier :

$$\langle f, g \rangle' = \langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle$$
$$(f \wedge g)' = (f') \wedge g + f \wedge (g')$$
$$\det\nolimits_{\mathscr{C}}(f,g)' = \det\nolimits_{\mathscr{C}}(f',g) + \det\nolimits_{\mathscr{C}}(f,g')$$

et pour $A, B \in \mathrm{C}^1(I, \mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$: $(AB)' = A'B + AB'$. □

II. Dérivées partielles et fonctions de classe C^1

III. Application : recherche d'extrémums

Remarque. Rappel : $\mathscr{B}((x_0, y_0), r)$ est la boule ouverte de centre (x_0, y_0) et de rayon r. Dire que $(x, y) \in \mathscr{B}((x_0, y_0), r)$ signifie que la distance entre (x, y) et (x_0, y_0) est strictement inférieure à r (on considère que la norme utilisée est la norme euclidienne canonique). $\square$

Définition 5 – Extremum global, extremum local

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ avec $D \subset \mathbb{R}^2$.

- *On dit que f admet en $(x_0, y_0) \in D$ un maximum global lorsque :*

$$\forall (x, y) \in D,\ f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0)$$

- *On dit que f admet en $(x_0, y_0) \in D$ un maximum local lorsque :*

$$\exists r > 0,\ \forall (x, y) \in \mathscr{B}((x_0, y_0), r),\ f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0)$$

- *On définit de même les notions de minimum global et minimum local.*
- *On dit que f admet en a un extremum global (respectivement un extremum local) lorsque f admet en a un minimum global ou un maximum global (respectivement un minimum local ou un maximum local).*

Remarque. Ces notions s'étendent sans difficultés au cas des fonctions de 3 variables, ou même de p variables. $\square$

$\diamond$ Pour les fonctions d'une seule variable, les dérivées sont utilisées dans la recherche des maximums et minimums des fonctions. Il ne faut cependant pas croire que si une fonction admet un maximum en un point alors sa dérivée est nécessairement nulle en ce point. Même lorsqu'il n'y a qu'une seule variable, ce résultat est faux. Par exemple la fonction $f : x \in [0, 1] \mapsto x$ admet clairement un maximum en 1 et pourtant sa dérivée n'est pas nulle en 1. Pour que le résultat soit valable, il faut considérer une fonction définie sur un ensemble ouvert.

Proposition 6 – Condition nécessaire d'extremum local

Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f \in \mathrm{C}^1(U, \mathbb{R})$ et f admet en $a \in U$ un extremum local, alors $\nabla f(a) = 0$ (réciproque fausse).

$\diamond$ On appelle point critique de $f \in \mathrm{C}^1(U, \mathbb{R})$ toute solution de l'équation $\nabla f(a) = 0$.

IV. Fonctions de classe C^2

Notation : Soit $f : U \to \mathbb{R}$. On définit les dérivées partielles secondes en posant (sous réserve d'existence) :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$\square$

IV. Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

Définition 7 – Fonction de classe $\mathcal{C}^2$

Une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est dite de classe $\mathcal{C}^2$ lorsque les dérivées partielles secondes existent en tout point de U et sont continues sur U. On note $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies et de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Théorème 8 – Schwarz

Si $f \in \mathcal{C}^2(U)$, alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Définition 9 – Matrice Hessienne

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Pour $a = (x_0, y_0) \in U$, on appelle matrice Hessienne de f en a, notée $H_f(a)$, la matrice :

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Remarque. On a une définition analogue pour 3 variables :

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(a) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(a) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a) \end{pmatrix}$$

Plus généralement, lorsqu'il y a p variables $(x_1, \ldots, x_p)$, $H_f(a)$ est la matrice dont le coefficient en ligne i et colonne j est :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$$

$\square$

Proposition 10 – DL_2 pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$

Avec les mêmes notations :

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} h^\top H_f(a) h + \underset{h \to 0}{o}\left(\|h\|^2\right)$$

Proposition 11 – Application à la recherche d'extrémums locaux

Soient $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et $a \in U$. si a est un point critique de f, alors on a les résultats suivants :

(1) Si $\mathrm{Sp}(H_f(a)) \subset \mathbb{R}^{+*}$, alors f admet un minimum local strict en a ;

(2) Si $\mathrm{Sp}(H_f(a)) \subset \mathbb{R}^{-*}$, alors f admet un maximum local strict en a ;

(3) Si $\mathrm{Sp}(H_f(a))$ contient à la fois une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative, alors f n'admet pas d'extrémum local en a.

Dans les autres cas, on ne peut pas conclure (en utilisant cette méthode).

Remarque. Lorsqu'il n'y a que deux variables, on peut utiliser le déterminant et la trace de la matrice symétrique $H_f(a)$ pour obtenir le signe des valeurs propres. □

V. Dérivée d'une composée

Proposition 12 – Dérivée d'une composée / Règle de la chaîne (1)

Soient $f \in \mathrm{C}^1(U, \mathbb{R})$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x : I \to \mathbb{R}$ et $y : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 telles que :

$$\forall t \in I,\ (x(t), y(t)) \in U$$

On peut donc considérer la composée :

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{f}: & I & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & f(x(t), y(t)) \end{array}$$

($\widetilde{f}$ représente la fonction obtenue à partir de f en l'appliquant avec $x(t)$ et $y(t)$). La fonction $\widetilde{f}$ est de classe C^1 sur I et :

$$\forall t \in I,\ \widetilde{f}'(t) = \frac{\mathrm{d}f(x(t), y(t))}{\mathrm{d}t} = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))$$

On note parfois ceci de manière plus concise : $\dfrac{\mathrm{d}\widetilde{f}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$.

Remarque. La notation encore plus concise :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

(qui consiste à confondre f et $\widetilde{f}$) n'est pas recommandée en mathématiques. □

Remarque. On peut aussi noter :

$$\widetilde{f}'(t) = \left\langle V(t), \nabla f(x(t), y(t)) \right\rangle \quad \text{produit scalaire de } \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} \text{ et } V(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$ □

Remarque. On peut adapter ceci au cas d'une fonction de trois variables. □

Proposition 13 – Dérivée d'une composée / Règle de la chaîne (2)

Soient $f \in \mathrm{C}^1(U, \mathbb{R})$*,* V *un ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *et* $x : V \to \mathbb{R}$ *et* $y : V \to \mathbb{R}$ *deux fonctions de classe* C^1 *telles que :*

$$\forall (u,v) \in V,\ (x(u,v), y(u,v)) \in U$$

On peut donc considérer la composée :

$$\widetilde{f} : \begin{array}{ccc} V & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & f(x(u,v), y(u,v)) \end{array}$$

La fonction $\widetilde{f}$ *est de classe* C^1 *sur* V *et pour* $(u,v) \in V$ *:*

$$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v), y(u,v)) \times \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v), y(u,v)) \times \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)$$
$$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v), y(u,v)) \times \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v), y(u,v)) \times \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)$$

On utilise parfois les notations plus concises :

$$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \quad et \quad \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

Les résultats à connaitre

Pour les fonctions d'une seule variable à valeurs vectorielles :

- Dérivabilité pour une fonction à valeurs vectorielle.
- Caractérisation par un développement limité à l'ordre 1.
- Opérations sur les fonctions dérivables.

Pour les fonctions de plusieurs variables :

- Dérivées partielles.
- Fonction de classe C^1.
- Différentielle et gradient.
- DL_1 pour une fonction de classe C^1.
- Une fonction de classe C^1 est continue.
- Caractérisation des fonctions constantes.
- Extrémum global, extrémum local.
- Condition nécessaire d'extremum local avec le gradient.
- Dérivée d'une composée et règle de la chaîne, plusieurs formulations.
- Fonction de classe C^2.
- Théorème de Schwarz.
- Matrice Hessienne.
- DL_2 pour une fonction de classe C^2.
- Application à la recherche d'extrémums locaux.

Quelques objectifs du chapitre

- Savoir étudier la continuité et le caractère C^1 d'une fonction de plusieurs variables.
- Savoir déterminer les extrémums d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ou sur un fermé borné de $\mathbb{R}^2$ avec le gradient et la matrice Hessienne.
- Savoir réaliser un changement de variables en coordonnées polaires.

En pratique

▸ Comment étudier la continuité ?

⚠Cette méthode s'applique dans beaucoup de situations mais n'est pas pour autant systématique.

Pour simplifier on considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ avec un problème en $(0,0)$. Pour monter que f est continue sur $\mathbb{R}^2$:

- On montre tout d'abord que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en appliquant les théorèmes généraux (sommes, produits, quotients, etc. de fonctions continues) ;
- On montre ensuite que f est continue en $(0,0)$ en établissant une majoration de la forme :

$$\left\| f(r\cos\theta, r\sin\theta) - f(0,0) \right\| \leqslant \varphi(r)$$

où $\varphi(r)$ ne dépend que de r et $\varphi(r) \xrightarrow[r\to 0]{} 0$.

Pour démontrer que f n'est pas continue en $(0,0)$, on montre que $f(x,0)$ ou $f(0,y)$ ne tendent pas vers $f(0,0)$ lorsque $x \to 0$ ou $y \to 0$ (on peut aussi considérer $f(x,x)$, $f(x,-x)$, $f(x,x^2)$ ou d'autres du même type). Si on dispose d'une fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ avec un problème en (x_0, y_0), on peut toujours se ramener à un problème en $(0,0)$ en considérant la fonction $f : (x,y) \mapsto (x_0 + x, y_0 + y)$.

▸ Comment étudier le caractère C^1 ?

⚠Cette méthode s'applique dans beaucoup de situations mais n'est pas pour autant systématique.

Pour simplifier on considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ avec un problème en $(0,0)$. Pour monter que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$:

- On montre tout d'abord que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en appliquant les théorèmes généraux (sommes, produits, quotients, etc. de fonctions de classe C^1). On détermine en particulier :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \text{ pour } (x,y) \neq (0,0)$$

- On détermine ensuite les dérivées partielles de f en $(0,0)$ en revenant à la définition :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x}; \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y}$$

- On dispose alors de deux fonctions $\partial f / \partial x$ et $\partial f / \partial y$, définies sur $\mathbb{R}^2$ avec un problème en $(0,0)$ et on montre qu'elles sont continues en appliquant la méthode précédente. Si on dispose d'une fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ avec un problème en (x_0, y_0), on peut toujours se ramener à un problème en $(0,0)$ en considérant la fonction $f : (x,y) \mapsto (x_0 + x, y_0 + y)$.

▸ Comment rechercher des extrémums ?

Considérons le cas usuel d'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U, ouvert de $\mathbb{R}^2$. On rencontre deux types de problèmes :

- Pour déterminer les extrémums (locaux) de f sur U, on commence par déterminer les points critiques de f dans U. Ensuite, pour un point critique $(x_0, y_0) \in U$, on considère la matrice Hessienne :
  - Si toutes ses valeurs propres sont de même signe strict, alors il y a un extrémum local ;
  - Si ses valeurs propres ont des signes stricts différents, alors il n'y a pas d'extrémum local ;
  - Si 0 est valeur propre, alors on ne peut pas conclure.
- Pour déterminer le maximum ou le minimum de f sur un fermé borné $K \subset U$, on utilise le fait que ces extrémums sont obtenus soit en des points critiques de f dans K (plus précisément : dans l'intérieur de K) soit en des points, non nécessairement critiques, situés sur le bord de K.

Illustrations du cours

Exercice 1 *Fonction à valeurs vectorielles.* Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$. On suppose que la fonction $t \mapsto \|f(t)\|_2$ est constante. Démontrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) \perp f'(t)$$

Exercice 2 *Fonction de classe* C^1 *(1).* Déterminer si la fonction f suivante est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$:

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \cos(xy+y^2) \end{array}$$

Exercice 3 *Fonctions de classe* C^1 *(2).* Les fonctions suivantes sont-elles de classe C^1 :

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}; \qquad g(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$
$$f(0,0) = 0 \qquad g(0,0) = 0$$

Déterminer le vecteur gradient de f et g en tout point où il est défini.

Exercice 4 *Fonction de classe* C^1 *(3).* Déterminer si la fonction f suivante est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$:

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \sqrt{x^2+y^2} \end{array}$$

Exercice 5 *Extrémums sur* $\mathbb{R}^2$*.* Déterminer les extrémums sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction $f : (x,y) \mapsto x^3 - 3x(1+y^2)$.

Exercice 6 *Extrémums sur un fermé borné.* Soit $f : (x,y) \mapsto x^3 - 3x(1+y^2)$.
(a) Déterminer les extrémums de f sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$.
(b) Déterminer les extrémums de f sur $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ -x \leqslant y \leqslant x\}$.

Exercice 7 *Extrémums locaux, matrice Hessienne.*
(a) Déterminer les extrémums locaux sur $\mathbb{R}^2$ de $f : (x,y) \mapsto x^2+y^2+xy$.
(b) Déterminer les extrémums locaux sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$ de f.
(c) Déterminer les extrémums locaux sur $\mathbb{R}^2$ de $g : (x,y) \mapsto x^2-y^2+2xy$.
(d) Déterminer les extrémums locaux sur $\mathbb{R}^2$ de $h : (x,y) \mapsto x^2+y^3$.
(e) Déterminer les extrémums locaux sur $\mathbb{R}^2$ de $k : (x,y) \mapsto x^2+y^4$.

Exercice 8 *Un exemple d'équation aux dérivées partielles.* On considère l'équation aux dérivées partielles :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2(x^2+y^2)$$

Donner l'expression en coordonnées polaires des solutions.