Borne supérieure, maximum et valeur absolue

I. Borne supérieure

Définition 1 – Majorant, borne supérieure

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que $m \in \mathbb{R}$ est un majorant de A lorsque :

$$\forall x \in A,\ x \leqslant m$$

On dit que m est la borne supérieure de A (et on note $m = \sup A$) lorsque :
- *m est un majorant de A ;*
- *pour tout majorant m' de A, $m \leqslant m'$.*

◇ Conséquence : pour démontrer que $\sup A \leqslant m$, il suffit de montrer que pour tout élément x de A, on a $x \leqslant m$.

Théorème 2 – Existence de la borne supérieure

Toute partie A de $\mathbb{R}$ non vide et majorée possède une unique borne supérieure.

Théorème 3 – Caractérisation de la borne supérieure

Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$; m est la borne supérieure de A si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont satisfaites :
(1) $\forall x \in A, x \leqslant m$;
(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A$ tel que $m - \varepsilon < x$.

◇ Définitions et résultats analogues pour minorant et borne inférieure.

Exemple. Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction bornée.
(a) Démontrer que $m = \sup\limits_{x \in I} \left|f(x)\right|$ existe.
(b) On suppose que $m = 0$. Que peut-on dire de f ?

➞ Notons que $\sup\limits_{x \in I} \left|f(x)\right|$ est une autre notation pour $\sup A$ avec $A = \{|f(x)| \mid x \in I\}$.
(a) L'ensemble A est une partie de $\mathbb{R}$ et comme l'intervalle I n'est pas vide, A est non vide également. La fonction f est bornée, donc $|f|$ est majorée c'est à dire :

$$\exists M \geqslant 0,\ \forall x \in I,\ \left|f(x)\right| \leqslant M$$

Par conséquent, l'ensemble A est majoré par M. Comme A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, A possède une borne supérieure de sorte que $m = \sup A$ est bien défini.

(b) On suppose que $m = 0$. On sait que m est un majorant de A donc, pour tout $x \in I$, $|f(x)| \leqslant 0$ et ceci implique : $\forall x \in I,\ f(x) = 0$. On en déduit que la fonction f est nulle sur I. □

II. Maximum

Définition 4

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que $m \in \mathbb{R}$ est le maximum de A (et on note $m = \max A$) lorsque m est un majorant de A et $m \in A$.

⚠ Une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ ne possède pas forcément de maximum (par exemple : $[0,1[$). Pour jusifier que $\max A$ existe, il faut donc donner des arguments supplémentaires. Par exemple :

- Si A est une partie non vide et finie de $\mathbb{R}$, alors $\max A$ existe ;
- Si f est une fonction continue sur un segment $[a,b]$, alors $\max\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ existe.

⋄ Définition analogue pour minimum.

Exemple. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

(a) Démontrer que $m = \max\limits_{x \in [a,b]} \left|f(x)\right|$ existe.

(b) On suppose que $m = 0$. Que peut-on dire de f ?

➞ Notons que $\max\limits_{x \in [a,b]} \left|f(x)\right|$ est une autre notation pour $\max A$ avec $A = \{|f(x)| \mid x \in [a,b]\}$.

(a) La fonction $|f|$ est définie sur un segment et continue. Par conséquent, $|f|$ est bornée et atteint ses bornes et en particulier $|f|$ possède un maximum sur $[a,b]$. Ainsi, $m = \max A$ est bien défini.

(b) On suppose que $m = 0$. On sait que m est un majorant de A donc, pour tout $x \in [a,b]$, $|f(x)| \leqslant 0$ et ceci implique : $\forall x \in [a,b],\ f(x) = 0$. On en déduit que la fonction f est nulle sur $[a,b]$. □

III. Valeur absolue

Définition 5 – Valeur absolue

Pour $x \in \mathbb{R}$, on appelle valeur absolue de x et on note $|x|$ le réel :

$$\begin{aligned} |x| &= x \text{ si } x \geqslant 0 \\ &= -x \text{ si } x < 0 \end{aligned}$$

⋄ Conséquence : pour montrer que $|x| \leqslant A$, il suffit de démontrer que $x \leqslant A$ et $-x \leqslant A$.

Théorème 6 – Inégalités avec la valeur absolue

- *Première inégalité triangulaire :* $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x + y| \leqslant |x| + |y|$.
- *Seconde inégalité triangulaire :* $\forall x, y \in \mathbb{R},\ ||x| - |y|| \leqslant |x - y|$.

Remarque. Ces inégalités restent vraies dans $\mathbb{C}$ pour le module. □