

Les théorèmes essentiels sur les suites

I. Existence de limites par majoration/minoration/encadrement

△ Ces théorèmes utilisent des inégalités et ne concernent donc que des suites réelles.

Théorème 1 – Convergence des suites monotones

Soit (u_n) une suite réelle croissante. On a équivalence entre :

- (i) La suite (u_n) est convergente;
- (ii) La suite (u_n) est majorée.

Lorsque c'est le cas, on a de plus : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

◇ Résultat analogue pour les suites décroissantes.

Définition 2 – Suites adjacentes

Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes lorsque les conditions suivantes sont réunies :

- quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq v_n$;
- la suite (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante;
- la suite $(v_n - u_n)$ converge vers 0.

Théorème 3 – Suites adjacentes

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors elles sont convergentes et leurs limites sont égales.

Théorème 4 – Encadrement (ou gendarmes)

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites réelles. On suppose que :

- $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang;
- (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite ℓ ,

alors (v_n) converge et sa limite est égale à ℓ .

Théorème 5 – Minoration/Majoration

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que :

- $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang;
- (u_n) diverge vers $+\infty$,

alors (v_n) diverge vers $+\infty$.

◇ Résultat analogue si l'on suppose que $u_n \leq v_n$ et $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$.

△ **Remarque.** Faire attention aux points suivants :

- Si (u_n) est croissante et majorée par $M \in \mathbb{R}$, alors (u_n) converge mais sa limite n'est pas forcément M ;
- Si (u_n) et (v_n) convergent respectivement vers ℓ et ℓ' et si $u_n < v_n$ pour tout n , alors par passage à la limite on a $\ell \leq \ell'$ mais on n'a pas forcément $\ell < \ell'$;
- Si $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang et les suites (u_n) et (w_n) convergent, rien ne dit que (v_n) converge.
- Une suite monotone a toujours une limite, mais ce n'est pas forcément une limite finie (autrement dit une suite monotone possède toujours une limite mais n'est pas forcément convergente).
- Ceci met en évidence que : avoir une limite et converger ce n'est pas la même chose. □

II. Suites extraites

◇ Ici (u_n) est une suite à valeurs réelles ou complexes. Les résultats à retenir :

- Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, alors toute suite extraite de (u_n) tend également vers ℓ . En particulier : $u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, $u_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ et $u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$;
- Si deux suites extraites de (u_n) tendent vers des limites différentes, alors la suite (u_n) ne possède pas de limite;
- Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers la même limite ℓ , alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.