Sommes de Riemann

Théorème 1 – Convergence des sommes de Riemann

Soit f une fonction définie sur un segment $[a,b]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

*Si f est **continue** sur $[a,b]$, alors $S_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.*

⚠ L'hypothèse de continuité est essentielle.

Remarques.

- On rencontre des variantes (au niveau des bornes de la somme) : si f est continue sur $[a,b]$, alors

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = S_n(f) - \frac{b-a}{n} f(a) + \frac{b-a}{n} f(b) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = S_n(f) + \frac{b-a}{n} f(b) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

- Cas particulier fréquent : si f est continue sur $[0,1]$, alors

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

□

Exemple. Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \cos\left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

➞ La fonction $f : x \mapsto \cos(x)$ est **continue** sur $[1,2]$ donc d'après les résultats précédents :

$$u_n = \frac{2-1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(1 + k\frac{2-1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_1^2 \cos(t)\,\mathrm{d}t = [\sin t]_1^2 = \sin(2) - \sin(1)$$

□

◇ Parfois la suite considérée n'est pas exactement une somme de Riemann comme dans l'exemple suivant.

Exemple. Déterminer un équivalent de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{n+k}$.

➞ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on met $\sqrt{n}$ en facteur :

$$u_n = \sqrt{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{k}{n}} = n\sqrt{n} \times \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{k}{n}}}_{=v_n}$$

La suite (v_n) est une somme de Riemann. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ est **continue** sur $[0,1]$, donc :

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}(2^{3/2} - 1) = \frac{4\sqrt{2}-2}{3}$$

La limite de (v_n) est **finie** et **non nulle**, donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4\sqrt{2}-2}{3}$ et par produit :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4\sqrt{2}-2}{3} n\sqrt{n}$$

□